Esercitazione 01: Algebra delle matrici e numeri complessi

14 marzo 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Definizioni di base

Definizione 1 (Matrice $(m \times n)$)**.** *Tabella di m righe ed n colonne*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Definizione 2 (Vettore (colonna) $(m \times 1)$)**.**

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad b_i \in \mathbb{R}$$

Diamo per scontati i concetti di *somma* e *differenza* di matrici, di *prodotto di una matrice per uno scalare*, di *prodotto di matrici*, di *trasposta di una matrice* e di *determinante* di una matrice quadrata.

2 Determinante di una matrice (quadrata)

Definizione 3 (Complemento algebrico)**.** *Data una matrice A $n \times n$, si dice complemento algebrico (o cofattore) di a_{ij} il determinante Δ_{ij} della sottomatrice di A ottenuta eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.*

Il calcolo è definito in modo ricorsivo:

1. $\det(a) = a$
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$

2.1 Proprietà del determinante

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, se A e B sono matrici quadrate

Se $\det(A) = 0$, A si dice **matrice singolare** (non invertibile).

3 Rango di matrici (rettangolari)

Definizione 4 (Rango)**.** *Il rango di una matrice (rettangolare) A, $\operatorname{rank}(A)$, è l'ordine della sottomatrice quadrata di A non singolare di ordine massimo.*

Il rango corrisponde al numero massimo di righe (e colonne) linearmente indipendenti tra loro.

Definizione 5 (Vettori linearmente indipendenti)**.** *Dati n vettori v_1, v_2, …, v_n, essi si dicono linearmente indipendenti se e solo se $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ scalari*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \neq 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Definizione 6 (Vettori linearmente dipendenti)**.** *Dati n vettori v_1, v_2, …, v_n, essi si dicono linearmente dipendenti se e solo se $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ scalari, tali che:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

4 Matrice inversa (o reciproca)

Definizione 7 (Matrice inversa)**.** *Data una matrice quadrata A $n \times n$, la sua matrice inversa A^{-1}, se esiste, è una matrice $n \times n$ tale che*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Teorema 8. *Condizione Necessaria e Sufficiente (CNS) per l'esistenza della matrice inversa di A è che la matrice A sia non singolare (cioè che il determinante di A sia non nullo):*

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Di seguito indicheremo con c_{ij} l'elemento sulla riga i-esima e sulla colonna j-esima di una matrice C.

4.1 Calcolo della matrice inversa

Data una matrice A $n \times n$ non singolare, l'elemento b_{ij} della sua matrice inversa $B = A^{-1}$ si calcola nel modo seguente

$$b_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det A}$$

dove Δ_{ji} è il complemento algebrico di a_{ji}.

4.2 Esempio nel caso di matrice 2×2

Data una matrice A 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

la sua inversa è:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Dimostrazione. La matrice inversa di A

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

ha come elementi

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\det A} = (-1)^{1+1} \frac{a_{22}}{\det A} = \frac{a_{22}}{\det A} \\ b_{12} &= \frac{\Delta_{21}}{\det A} = (-1)^{1+2} \frac{a_{12}}{\det A} = -\frac{a_{12}}{\det A} \\ b_{21} &= \frac{\Delta_{12}}{\det A} = (-1)^{2+1} \frac{a_{21}}{\det A} = -\frac{a_{21}}{\det A} \\ b_{22} &= \frac{\Delta_{22}}{\det A} = (-1)^{2+2} \frac{a_{11}}{\det A} = \frac{a_{11}}{\det A} \end{aligned}$$

dove

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

□

Esempio

Calcolare la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Basta applicare la formula (9). Quindi si può calcolare

$$\frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{0 \cdot 3 - 2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

e moltiplicarlo per una matrice ottenuta da A scambiando tra di loro gli elementi sulla diagonale principale e invertendo il segno degli elementi fuori dalla diagonale principale. Si ottiene, quindi

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3 Proprietà della matrice inversa

Date due matrici quadrate A e B, valgono le seguenti proprietà:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1} \quad$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. se A è una matrice diagonale
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$
6. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

5 Polinomio caratteristico

Definizione 10 (Polinomio caratteristico)**.** *Il polinomio caratteristico di una matrice A $n \times n$ è il polinomio di grado n nella variabile complessa λ*

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Definizione 11 (Equazione caratteristica)**.** *L'equazione caratteristica è l'equazione*

$$p_A(\lambda) = 0$$

Esempio

Calcolare il polinomio e l'equazione caratteristica della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Calcoliamo

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

da cui possiamo ricavare il polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

L'equazione caratteristica è quindi

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

6 Autovalori e autovettori

Definizione 12 (Autovalori e autovettori). $\lambda \in \mathbb{C}$ *si dice autovalore di una matrice* A $n \times n$ *se esiste un vettore* $v \in \mathbb{C}^n$ *con* $v \neq 0$ *tale che*

$$Av = \lambda v.$$

v *è detto autovettore di* A *associato a* λ.

Da questo segue che

1. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Dimostrazione. λ è autovalore se esiste $v \neq 0$ tale che $Av = \lambda v$. Questa equazione è equivalente a

$$(\lambda I - A)v = 0$$

che ha soluzioni diverse da $v = 0$ se e solo se $\det(\lambda I - A) = 0$. □

2. Il numero degli autovalori è $\mu \leq n$, $\mu \in \mathbb{N}$

3. Ogni autovalore compare n_i volte nell'equazione caratteristica, cioè:

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{\mu} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

4. n_i è la **molteplicità algebrica** di λ_i

Esempio

Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

L'equazione caratteristica di A calcolata nell'esempio precendente

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

consente di determinare gli autovalori di A:

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

6.1 Proprietà degli autovalori

Data una matrice A $n \times n$ con elementi reali, valgono le seguenti proprietà

1. La matrice A ha μ autovalori, ognuno con molteplicità algebrica n_i, $i = 1, \ldots, \mu$
2. $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$, ossia la matrice A di ordine n ha n autovalori in campo complesso, ognuno contato con la sua molteplicità algebrica
3. Gli autovalori sono reali oppure complessi e coniugati
4. $\det A = \prod_{i=1}^{\mu} (\lambda_i)_i^n = \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \cdots \lambda_\mu^{n_\mu}$

- Di conseguenza
$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists i : \lambda_i = 0$$

5. A triangolare (o diagonale) $\Rightarrow \lambda_i = a_{ii}$
6. Se λ è autovalore di $A \Rightarrow \lambda^{-1}$ è autovalore di A^{-1}
7. La traccia della matrice A è uguale alla somma degli autovalori di A
$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{\mu} n_i \lambda_i$$

6.2 Proprietà degli autovettori

- v_i è autovettore o **autospazio** associato a λ_i
- La dimensione (numero di gradi di libertà) dell'autospazio v_i è $1 \leq g_i \leq n_i$ e si chiama **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ_i
- La molteplità geometrica è data da:
$$g_i := n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)$$

Esempio

Consideriamo la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:
$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) &= \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono $\mu = 2$:

1. $\lambda_1 = 1$, con molteplicità algebrica $n_1 = 2$ e molteplicità geometrica
$$g_1 = n - \operatorname{rank}(I - A) = 3 - \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 - 1 = 2$$
2. $\lambda_2 = -1$, con molteplicità algebrica $n_2 = 1$ e molteplicità geometrica
$$g_2 = n - \operatorname{rank}(I - A) = 3 - \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 3 - 2 = 1$$

In questo caso la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica dei due autovalori.

7 Similitudine e diagonalizzabilità

Definizione 13 (Similitudine)**.** *Due matrici quadrate A e B, entrambe $n \times n$, si dicono simili se esiste una matrice non singolare $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tale che*

$$B = TAT^{-1} \qquad \textit{(Trasformazione di similutidine)}$$

Teorema 14. *Gli autovalori di matrici simili coincidono.*

Dimostrazione. Siano A e B due matrici simili. Gli autovalori di $B = TAT^{-1}$ si ottengono come

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - B) =& \det(\lambda I - TAT^{-1}) = \det(T\lambda I T^{-1} - TAT^{-1}) = \det(T\,(\lambda I - A)\,T^{-1}) \\ =& [\det(T)]\,[\det(\lambda I - A)]\left[\det\left(T^{-1}\right)\right] \\ =& \det(\lambda I - A)\end{aligned}$$

□

Definizione 15 (Diagonalizzabilità)**.** *Data una matrice A ($n \times n$), essa è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, cioè se esiste una matrice T non singolare tale che TAT^{-1} sia diagonale.*

Valgono alcune proprietà:

1. A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A ammette n autovettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_\mu\}$ linearmente indipendenti. Inoltre, la matrice T di trasformazione che pone A in forma diagonale ha inversa data da

   $$T^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_\mu \end{bmatrix}$$

   dove il numero di colonne di v_i è pari a g_i.

2. A è diagonalizzabile se e solo se $\forall \lambda_i$, $i = 1, \ldots, \mu$

   $$n_i = g_i, \quad \forall i = 1, \ldots, \mu$$

3. Di conseguenza si ha che se A ha n autovalori distinti (ossia $\mu = n$) $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

Esempio

Verificare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e calcolare la matrice di similitudine per porla in forma diagonale.

Soluzione

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) =& (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) + 0 + 0 - (0 + 0 + (\lambda + 1)) = \\ =& \left((\lambda - 2)^2 - 1\right)(\lambda + 1) = \left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1\right)(\lambda + 1) = \\ =& (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1)\end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi

$$\begin{cases} \lambda_1 =& 3 \\ \lambda_2 =& 1 \\ \lambda_3 =& -1 \end{cases}$$

Dato che gli $\mu = 3$ autovalori calcolati sono distinti, la matrice è diagonalizzabile.

Calcoliamo quindi gli autovettori associati agli autovalori

- $\lambda_1 = 3$

$$Av_1 = 3v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 3\alpha \\ \alpha + 2\beta = 3\beta \\ -\gamma = 3\gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha + \alpha = 3\alpha \\ \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Si può quindi scegliere un qualunque valore per α e ottenere un autovettore associato a λ_1. Scegliamo $\alpha = 1$ e otteniamo l'autovettore

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 1$

$$Av_2 = v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = \alpha \\ \alpha + 2\beta = \beta \\ -\gamma = \gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha - \alpha = \alpha \\ \beta = -\alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Si può quindi scegliere un qualunque valore per α e ottenere un autovettore associato a λ_2. Scegliamo $\alpha = 1$ e otteniamo l'autovettore

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_3 = -1$

$$Av_3 = -v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -\alpha \\ \alpha + 2\beta = -\beta \\ -\gamma = -\gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ \alpha - 6\alpha = -3\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma \end{cases}$$

Si può quindi scegliere un qualunque valore per γ e ottenere un autovettore associato a λ_3. Scegliamo $\gamma = 1$ e otteniamo l'autovettore

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ora possiamo ricavare la matrice di similitudine

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(T^{-1}) = 3, \quad T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e diagonalizzare la matrice A

$$A_d = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Osservazione 1. *Se avessimo scelto altri autovettori il risultato sarebbe stato lo stesso.*

Osservazione 2. *L'ordine con cui gli autovettori sono accostati per ottenere la matrice di similitudine, definisce l'ordine con cui appaiono gli autovalori nella matrice diagonalizzata* A_d.

Esercizio

Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio

Dimostrare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

8 Esponenziale di matrice

Data la matrice A $n \times n$, l'esponenziale della matrice $A \cdot t$ è definito come

$$e^{A \cdot t} := I + A \cdot t + \frac{1}{2!}(A \cdot t)^2 + \frac{1}{3!}(A \cdot t)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}(A \cdot t)^k + \ldots$$

con I matrice identità di dimensione $n \times n$.

Da notare che

$$\begin{aligned} (At)^2 &= At \cdot At = A \cdot At^2 = A^2 t^2 \\ (At)^3 &= At \cdot At \cdot At = A \cdot A \cdot At^3 = A^3 t^3 \\ &\vdots \\ (At)^k &= A^k t^k \end{aligned}$$

Inoltre, la derivata rispetto al tempo dell'esponenziale della matrice $A \cdot t$ è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = A e^{A \cdot t} = e^{A \cdot t} A$$

in analogia con il caso scalare.

Osservazione 3. *se* $A = [a]$ *è scalare*

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}(at)^2 + \frac{1}{3!}(at)^3 + \ldots$$

che è lo sviluppo in serie di Taylor di e^{at} *attorno a* $t = 0$.

Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

determinare e^{At}.

Soluzione

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 t)^2 \end{bmatrix} + \dots \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{1}{2!}(\lambda_1 t)^2 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t + \frac{1}{2!}(\lambda_2 t)^2 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Da notare che se A è diagonale, e^{At} è anch'essa diagonale, con gli elementi sulla diagonale principale dati dagli esponenziali degli autovalori di A moltiplicati per t.

Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

determinare e^{At}.

Soluzione

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots & t\left(1 + \lambda t + \frac{1}{2!}\lambda^2 t^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 t^3 + \dots\right) \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

determinare e^{At}.

Soluzione

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \\
&= \begin{bmatrix} 1 & t + \lambda\frac{t^2}{2!} + \lambda^2\frac{t^3}{3!} + \dots \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda}\left(-1 + 1 + t + \lambda^2\frac{t^2}{2!} + \lambda^3\frac{t^3}{3!} \dots\right) \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right) \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

8.1 Diagonalizzabilità dell'esponenziale

Se A è una matrice diagonalizzabile

$$TAT^{-1} = A_d$$

e^{At} si può ottenere come

$$e^{At} = T^{-1}e^{A_d t}T$$

con $e^{A_d t}$ matrice diagonale data da

$$e^{A_d t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Si osservi che $A = T^{-1}A_d T$. Allora

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots \\ &= T^{-1}T + T^{-1}A_d Tt + \frac{1}{2!}(T^{-1}A_d Tt)^2 + \frac{1}{3!}(T^{-1}A_d Tt)^3 + \dots \\ &= T^{-1}T + T^{-1}A_d Tt + \frac{1}{2!}T^{-1}A_d TT^{-1}A_d Tt^2 + \frac{1}{3!}T^{-1}A_d TT^{-1}A_d TT^{-1}A_d Tt^3 + \dots \\ &= T^{-1}T + T^{-1}A_d Tt + \frac{1}{2!}T^{-1}A_d^2 Tt^2 + \frac{1}{3!}T^{-1}A_d^3 Tt^3 + \dots \\ &= T^{-1}\left[I + A_d t + \frac{1}{2!}(A_d t)^2 + \frac{1}{3!}(A_d t)^3 + \dots\right]T \\ &= T^{-1}e^{A_d t}T \end{aligned}$$

□

9 Numeri complessi

Definizione 16 (Numero complesso)**.** *Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è determinato da due numeri reali $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, detti rispettivamente* parte reale *e* parte immaginaria*. Il numero complesso si esprime nella* forma algebrica*:*

$$z = a + \jmath b,$$

*dove $\jmath$ è l'*unità immaginaria*. Dato $z = a + \jmath b$, si indicano $a = \Re(z)$ e $b = \Im(z)$.*

Definizione 17 (Unità immaginaria)**.** *Il numero complesso $\jmath$ è detto* unità immaginaria*. L'unità immaginaria gode della seguente proprietà:*

$$\jmath^2 = \jmath \cdot \jmath = -1$$

L'insieme dei complessi è indicato con $\mathbb{C}$. Il sottoinsieme dei complessi a parte immaginaria nulla si identifica con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. I numeri complessi con parte reale nulla si dicono **numeri immaginari** o **numeri immaginari puri**.

L'insieme $\mathbb{C}$ non è ordinato: non ha alcun senso scrivere $z_1 < z_2$ o $z_1 > z_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Esempio

Si determini la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = 1 - \jmath 2$$

Soluzione

La parte reale di z è $\Re(z) = 1$, mentre la parte immaginaria è $\Im(z) = -2$.

Definizione 18 (Coniugato)**.** *Dato un numero complesso $z = a + \jmath b$, si definisce il numero complesso* coniugato

$$\bar{z} = a - \jmath b$$

Una notazione alternativa per il coniugato è anche z^*

Esempio

Dato il numero complesso $z = 1 - \jmath 2$, determinare il suo coniugato.

Soluzione

Il coniugato di z è dato da $\bar{z} = 1 + \jmath 2$.

9.1 Inverso moltiplicativo

Definizione 19 (Inverso moltiplicativo di un numero complesso)**.** *Dato un numero complesso $z = a + \jmath b$, con $z \neq 0$, il suo inverso moltiplicativo si ottiene come*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - \jmath b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \jmath \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Osservazione 4. *Si noti che se $z = \jmath$, il suo inverso è*

$$\frac{1}{\jmath} = -\jmath.$$

10 Rappresentazione polare

Dato che un numero complesso è specificato da due numeri reali è naturale identificare $z = a + \jmath b \in \mathbb{C}$ con la sua rappresentazione cartesiana $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, come mostrato in Figura 1. Il piano diventa allora una rappresentazione dell'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$. L'asse delle ascisse si dice *asse reale* e quello delle ordinate *asse immaginario*.

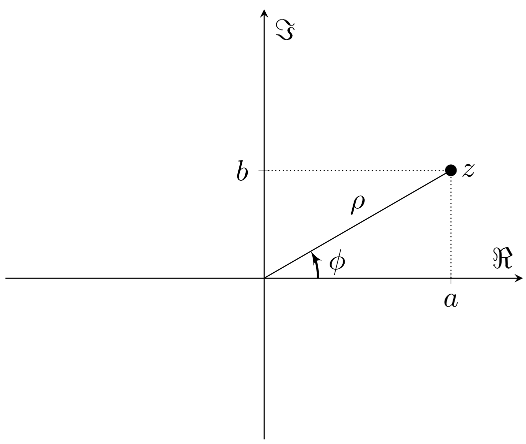

Figura 1: Rappresentazione di un numero complesso $z = a + \jmath b$ sul piano complesso.

Nel piano si può specificare un punto z anche assegnandone le coordinate polari (ρ, ϕ), dove ρ è il **modulo** e ϕ la **fase** (o argomento) del vettore che ha come origine l'origine del piano complesso, e come estremo il punto z. La coppia (ρ, ϕ) è la **rappresentazione polare** del numero complesso

$$z = a + \jmath b = \rho\left(\cos(\phi) + \jmath \sin(\phi)\right).$$

Definizione 20 (Modulo di un numero complesso)**.** *Il modulo di un numero complesso $z = a + \jmath b$ si denota con $|z| = \rho$ ed è dato da*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Osservazione 5. *Si noti che $|z|^2 = \rho^2 = z\bar{z}$.*

Definizione 21 (Fase di un numero complesso)**.** *La fase (o argomento) di un numero complesso $z = a + \jmath b$ si denota con $\measuredangle z = \arg(z) = \phi$ ed è determinata tramite la relazione*

$$\measuredangle z = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right), & \textit{se } a > 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \textit{se } a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \textit{se } a = 0 \textit{ e } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \textit{se } a = 0 \textit{ e } b < 0 \end{cases}$$

11 Esponenziale trigonometrico

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si definisce

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Questa definizione è identica a quella che si da nel caso di z reale. Anche nel caso complesso la serie è assolutamente convergente e vale

$$e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} e^{\beta}$$

e quindi per $z = a + \jmath b$

$$e^z = e^{a+\jmath b} = e^a e^{\jmath b}.$$

11.1 Formula di Eulero

Si consideri il numero complesso $z = \jmath b$. Dalla definizione, si può ricavare che

$$e^{\jmath b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\jmath b)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k}}{(2k)!} + \jmath \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nelle due sommatorie si riconoscono le serie di Taylor delle funzioni $\cos(b)$ e $\sin(b)$. Si può ricavare così, la *formula di Eulero*

$$e^{\jmath b} = \cos(b) + \jmath \sin(b).$$

L'esponenziale di un numero complesso immaginario puro è strettamente legato alla rappresentazione polare dei numeri complessi. Basta osservare che per $z \in \mathbb{C}$

$$z = a + \jmath b = \rho\left(\cos(\phi) + \jmath \sin(\phi)\right) = \rho e^{\jmath \phi} = |z| e^{\jmath \measuredangle z}$$

Analogamente, si può dimostrare che il coniugato di z è dato da

$$\bar{z} = a - \jmath b = \rho\left(\cos(\phi) - \jmath \sin(\phi)\right) = \rho e^{-\jmath \phi} = |z| e^{-\jmath \measuredangle z}$$

Esempio

Trovare la rappresentazione polare $\rho e^{\jmath \phi}$ del numero complesso $z = 1 - \jmath$.

Soluzione

Per ottenere la rappresentazione polare basta calcolare

$$\rho = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Quindi, si ha che $z = \sqrt{2} e^{-\jmath \frac{\pi}{4}}$.

11.2 Utili espressioni trigonometriche

Dalla formula di Eulero per $e^{\jmath\alpha}$ e $e^{-\jmath\alpha}$, è possibile ricavare le seguenti relazioni

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{\jmath\alpha} + e^{-\jmath\alpha}}{2}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{e^{\jmath\alpha} - e^{-\jmath\alpha}}{2\jmath}$$