# Esercitazione 02: Analisi di sistemi dinamici: movimenti ed equilibri

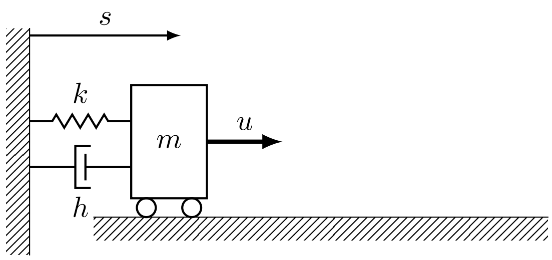
21 marzo 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

**Fondamenti di Automatica**
Prof. M. Farina

# 1 Sistema massa-molla-smorzatore

Sia dato il sistema fisico riportato in Figura, che rappresenta un carrello che si muove lungo una guida orizzontale rettilinea. Si considera il contributo dell'attrito trascurabile. Al carrello di massa $m$ viene applicata una forza $u(t)$ lungo la direzione del moto. L'uscita del sistema è la posizione $s(t)$ del carrello. Il carrello è connesso a un muro con una molla con costante elastica $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ e con uno smorzatore con costante di smorzamento $h \in \mathbb{R}$, $h \geq 0$.




1. Scrivere le equazioni del sistema nello spazio di stato.
2. Calcolare gli autovalori del sistema al variare di $k$ e $h$.
3. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $s(0) = 1$ e velocità nulla.
4. Posti $m = 1$, $k = h = 2$ calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $s(0) = 1$ e velocità nulla.
5. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 1$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $s(0) = 1$ e velocità nulla.
6. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 0$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $s(0) = 1$ e velocità nulla.
7. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, si trovi il valore di $\overline{u}$ tale che il sistema abbia un equilibrio in posizione $\overline{s} = 2$ e velocità nulla.
8. Dire cosa cambia nel punto precedente se la posizione e la velocità iniziali sono entrambe nulle, mentre la forza applicata al carrello è $u(t) = \overline{u} = 4$.

## Soluzione

1. Il sistema nello spazio di stato è descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\frac{k}{m}s(t) - \frac{h}{m}v(t) + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) = s(t) \end{cases}$$

Chiamando

$$x(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

il sistema può essere scritto in forma matriciale come:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

2. Gli autovalori del sistema si ottengono calcolando il polinomio caratteristico della matrice $A$:

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{h}{m} \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{h}{m}\lambda + \frac{k}{m}$$

da cui si ricavano gli autovalori:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{h}{m} \pm \sqrt{\frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

Se

- $\frac{h^2}{m^2} \geq 4\frac{k}{m}$, allora si hanno **modi reali** con autovalori strettamente negativi (se $h > 0$)
- $\frac{h^2}{m^2} < 4\frac{k}{m}$, allora si hanno **modi complessi coniugati** con autovalori a parte reale strettamente negativa (se $h > 0$)

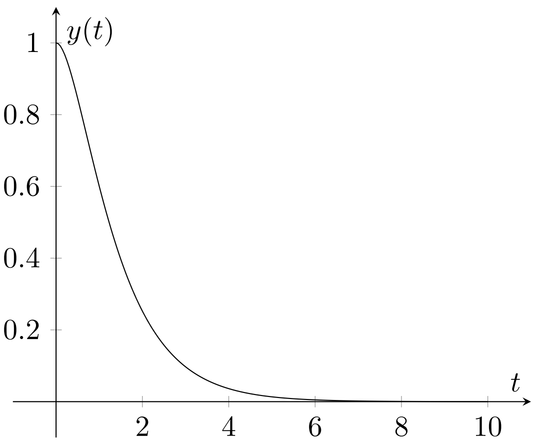
3. Considerando $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, e per condizioni iniziali

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la risposta liber dell'uscita è:

$$y_L(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

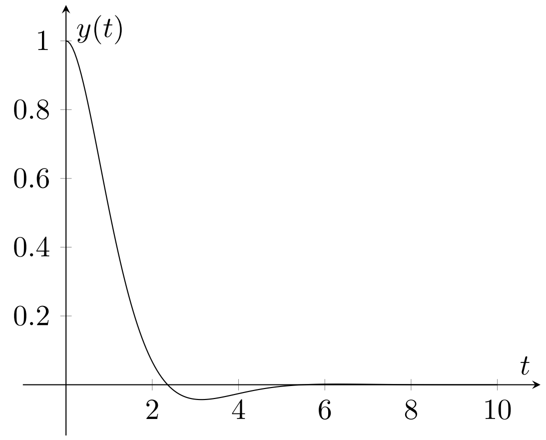
L'andamento dell'uscita è riportato in figura.




4. Nel caso in cui $m = 1$, $k = h = 2$, e condizioni iniziali uguali a quelle del punto precedente, la risposta libera dell'uscita è data da:

$$\begin{aligned} y_L(t) &= \frac{1}{2}(1 - \jmath)\, e^{(-1+\jmath)t} + \frac{1}{2}(1 + \jmath)\, e^{(-1-\jmath)t} \\ &= e^{-t}\left(\cos(t) + \sin(t)\right) \end{aligned}$$

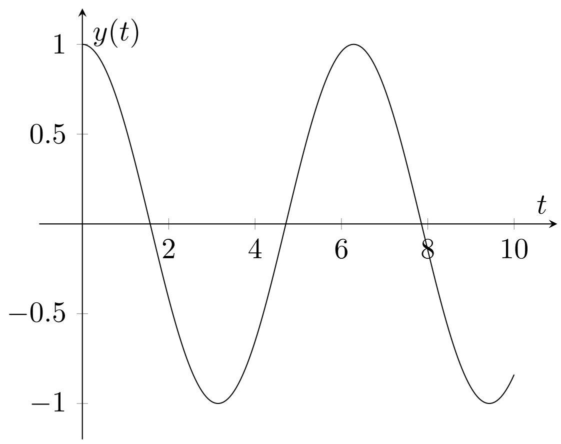
L'andamento dell'uscita è riportato in figura.




5. Considerando $m = 1$, $h = 0$ e $k = 1$, e condizioni iniziali uguali a quelle del punto precedente, la risposta libera dell'uscita è data da:

$$y_L(t) = \cos(t).$$

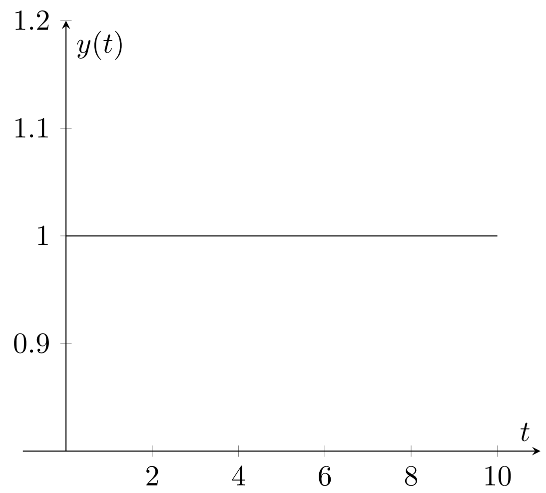
L'andamento dell'uscita è riportato in figura.




6. Considerando $m = 1$, $h = 0$ e $k = 0$, e condizioni iniziali uguali a quelle del punto precedente, la risposta libera dell'uscita è data da:

$$y_L(t) = 1, \forall t \geq 0$$

L'andamento dell'uscita è riportato in figura.



7. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

L'esercizio richiede di trovare il valore di $u(t) = \overline{u}$ tale che il punto

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sia equilibrio del sistema. Si può quindi imporre la condizione di equilibrio:

$$\begin{aligned} A\overline{x} + B\overline{u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -4 + \overline{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

da cui: $\overline{u} = 4$.

Questo significa che se si parte dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T$, e $u(t) = \overline{u} = 4 \ \forall t \geq 0$, allora $x(t) = x(0)$, $\forall t \geq 0$.

8. L'esercizio richiede quindi di valutare cosa succede nel caso in cui $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $u(t) = \overline{u} = 4$ $\forall t \geq 0$. Per affrontare questo problema si può scomporre il movimento in due contributi, per il principio di sovrapposizione degli effetti:

   (a) Il movimento dato dall'ingresso $u(t) = \overline{u} = 4$, partendo da condizioni iniziali $x(0) = \overline{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{cases} x^1(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \overline{x} \\ u^1(t) = 4 \end{cases}, \quad x^1(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall t \geq 0.$$

   (b) Il movimento dato dall'ingresso $u(t) = 0$, partendo da condizioni iniziali $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T - \overline{x}$:

$$\begin{cases} x^2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \overline{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u^2(t) = 0 \end{cases}, \quad x^2(t) = x_L(t) = e^{At} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che:

$$\begin{aligned} x(0) &= x^1(0) + x^2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u(t) &= u^1(t) + u^2(t) = 4 \\ x(t) &= x^1(t) + x^2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il movimento dello stato sistema, per $t \to \infty$ tende quindi all'equilibrio $\overline{x}$.

Per quanto riguarda l'uscita, si ha che:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + y_L^2(t)$$

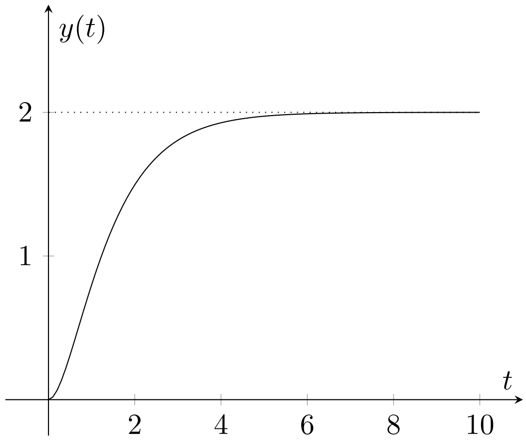
Dato che:

$$y_L^2(t) = -2\left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)$$

si ha che:

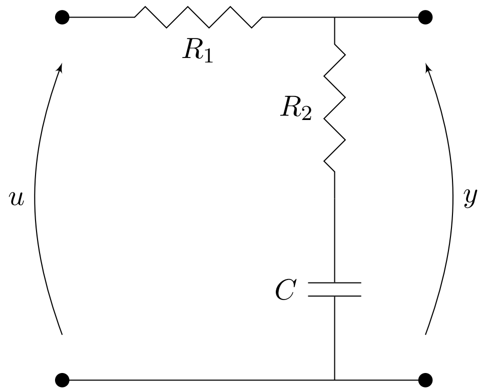
$$y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

L'andamento dell'uscita è riportato in figura.



## 2 Circuito RC

Si consideri il partitore di tensione rappresentato in figura con $R_1 = R_2 = 1$ e $C = 1$, dove $u(t)$ è la tensione di ingresso al circuito e $y(t)$ è la tensione misurata in uscita.




1. Scrivere il modello del circuito nello spazio di stato.
2. Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio per $u(t) = \overline{u}$, $\forall t \geq 0$.
3. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \overline{u}\,\mathrm{sca}(t)$, per condizioni iniziali nulle.
4. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \overline{u}e^{-2t}$, per condizioni iniziali nulle.
5. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \overline{u}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, per condizioni iniziali nulle.

### Soluzione

1. Il modello del sistema nello spazio di stato, chiamando con $x(t)$ la tensione sul condensatore, è:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}x(t) + \dfrac{1}{(R_1+R_2)C}u(t) \\ y(t) = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}x(t) + \dfrac{R_2}{R_1+R_2}u(t) \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{1}{2}x(t) + \dfrac{1}{2}u(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{2}x(t) + \dfrac{1}{2}u(t) \end{cases}.$$

2. Lo stato di equilibrio si ottiene per $\dot{x}(t) = 0$, ossia:

$$-\frac{1}{2}\overline{x} + \frac{1}{2}\overline{u} = 0$$
$$\overline{x} = \overline{u}$$

e l'uscita di equilibrio è quindi $\overline{y} = \overline{u}$.

3. La risposta all'ingresso $u(t) = \overline{u}\,\mathrm{sca}(t)$ per condizioni iniziali nulle è data solo dal contributo del movimento forzato dello stato:

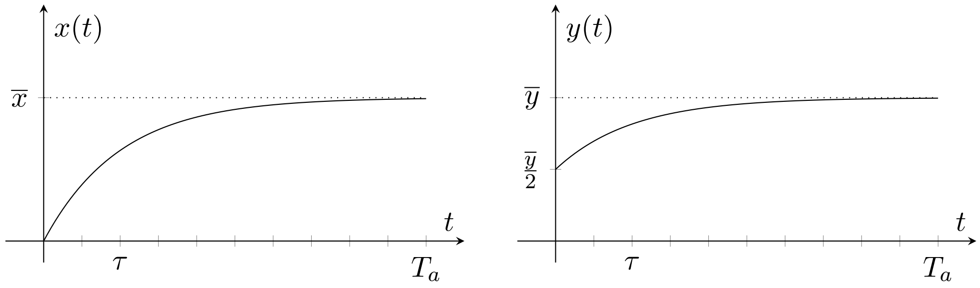
$$\begin{aligned} x_F(t) &= \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}\frac{\overline{u}}{2}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \overline{u}\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right), t \geq 0. \end{aligned}$$

quindi la risposta del sistema è:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}x_F(t) + \frac{1}{2}u(t) \\ &= \overline{u}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right), t \geq 0. \end{aligned}$$

Il tempo di assestamento dell'uscita è $T_a = 5\tau = 10$ unità di tempo.

L'andamento dello stato e dell'uscita del sistema sono mostrati in figura.



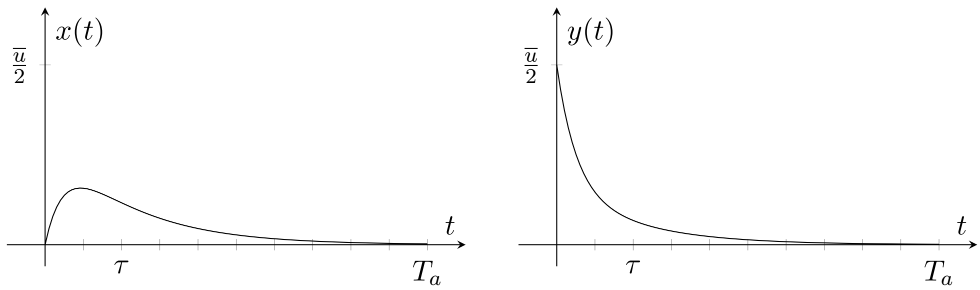

4. La risposta all'ingresso $u(t) = \overline{u}e^{-2t}$ per condizioni iniziali nulle è data solo dal contributo del movimento forzato dello stato:

$$\begin{aligned} x_F(t) &= \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \frac{\overline{u}}{2} e^{-2\tau} \, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{3}\overline{u}\left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-2t}\right), t \geq 0. \end{aligned}$$

L'uscita è quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{6}\overline{u}\left(e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right) + \overline{u}e^{-2t} \\ &= \frac{\overline{u}}{6}\left(e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-2t}\right) \end{aligned}$$

L'andamento dello stato e dell'uscita del sistema sono mostrati in figura.




**Osservazione 1.** *Nel punto precedente, il modo forzante è costante, mentre il modo proprio del sistema è $e^{-\frac{t}{2}}$. L'uscita forzata è combinazione lineare di questi due.*
*In questo caso, il modo forzante è $e^{-2t}$, mentre il modo proprio del sistema rimane $e^{-\frac{t}{2}}$. L'uscita forzata è una somma pesata delle due componenti.*

5. La risposta all'ingresso $u(t) = \overline{u}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ per condizioni iniziali nulle è data solo dal contributo del movimento forzato dello stato. È utile riscrivere l'ingresso come:

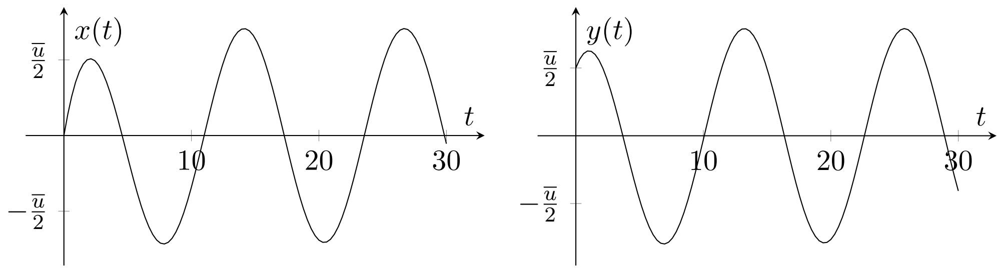
$$\frac{\overline{u}}{2}\left(e^{\jmath\frac{t}{2}} + e^{-\jmath\frac{t}{2}}\right).$$

$$\begin{aligned} x_F(t) &= \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \frac{1}{2} u(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\overline{u}}{2}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - e^{-\frac{t}{2}}\right) \end{aligned}$$

L'uscita è quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\overline{u}}{4}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - e^{-\frac{t}{2}}\right) + \frac{\overline{u}}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{\overline{u}}{4}\left(3\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - e^{-\frac{t}{2}}\right) \end{aligned}$$

L'andamento dello stato e dell'uscita del sistema sono mostrati in figura.




**Osservazione 2.** *Si noti che vale la stessa considerazione fatta per i punti precedenti.*