

Esercitazione 03: Sistemi a tempo discreto

01 aprile 2016 (2h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Analisi di investimenti

Una banca propone un tasso d'interesse $i_1 = 3\%$ trimestrale mentre un'altra propone un tasso $i_2 = 12.5\%$ annuale. Se si ha intenzione di mantenere il capitale investito I per almeno un anno, quale dei due investimenti è più conveniente?

2 Prestito

Una banca propone un prestito pari a P , con un tasso d'interesse fisso i da estinguere con una rata annuale fissa R .

1. Se si vuole estinguere il prestito in un numero N di anni, quale dovrà essere l'importo della rata R ?
2. Fissato il valore della rata R , in quanti anni si estinguerà il prestito?

3 Modello degli studenti universitari

Si consideri la dinamica degli studenti in un corso triennale. Siano $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ il numero di iscritti al 1°, 2°, 3° anno dell'anno accademico k .

- $u(k)$: il numero di studenti che superano l'esame di maturità nell'anno k e si iscrivono nell'anno $k + 1$;
- $y(k)$: il numero di laureati nell'anno k ;
- $\alpha_i \in [0, 1]$: tasso degli studenti promossi nell' i -esimo anno di corso ($i \in \{1, 2, 3\}$);
- $\beta_i \in [0, 1]$: tasso degli studenti ripetenti nell' i -esimo anno di corso ($i \in \{1, 2, 3\}$);
- $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i + \beta_i \leq 1$, ossia $1 - \alpha_i + \beta_i$ rappresenta il tasso di abbandono all'anno i .

Si trascurino le iscrizioni di studenti provenienti da altre università.

1. Scrivere il modello dinamico del sistema.
2. Studiare la stabilità del sistema dinamico.
3. Posto:

$$\alpha_1 = 0.5 \quad \alpha_2 = 0.6 \quad \alpha_3 = 0.5 \quad \beta_1 = 0.2 \quad \beta_2 = 0.2 \quad \beta_3 = 0.5$$

determinare lo stato di equilibrio corrispondente a $u(k) = \bar{u} = 4000$.

4 Il ranking di Google: PageRank (semplificato)

Un qualsiasi motore di ricerca su Internet, una volta trovate tutte le pagine che contengono il testo richiesto dall'utente, ha il problema di decidere l'ordine in cui presentare all'utente l'elenco dei riferimenti alle pagine trovate dal motore di ricerca (PageRank). Un modello semplificato dell'algoritmo di ranking utilizzato da Google è descritto in seguito.

Si immagini una persona che navighi in rete senza mai fermarsi e che visiti le pagine della rete scegliendo i link uscenti da ciascuna pagina visitata in maniera del tutto casuale. La successione di eventi decisionali, e cioè la scelta di uno dei link contenuti nella pagina visitata corrente, definisce l'indice temporale k . Se la generica i -esima pagina ha N_i link ad altre pagine, allora la probabilità che la persona passi dalla pagina i alla pagina j è data da:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N_i}, & \text{se } \exists \text{ link da } i \text{ a } j \\ 0, & \text{se } \nexists \text{ link da } i \text{ a } j \end{cases}$$

Indicando con $x_i(k)$ la probabilità che l'utente si trovi dopo l'evento k sulla pagina i , si ha:

$$x(k+1) = Ax(k),$$

dove gli elementi della matrice A sono $a_{ji} = \alpha_{ij}$ con $i \neq j$, e $a_{ii} = 0$.

La probabilità $x_i(k)$ sul lungo periodo rappresenta il PageRank della pagina i -esima. Valori elevati di $x_i(k)$ indicano infatti un'alta probabilità di visitare la pagina i .

Considerando la rete mostrata in Figura 1:

1. Scrivere il modello del sistema.
2. Valutare la stabilità del sistema.
3. Calcolare il ranking delle pagine della rete.

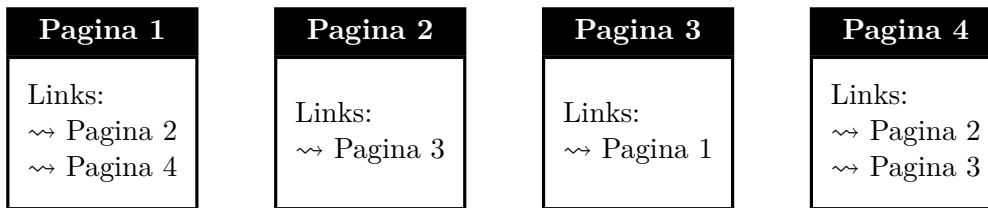


Figura 1: Collegamenti fra le pagine web di una rete.

5 Popolazioni animali

Consideriamo il famoso problema posto da Leonardo Pisano detto Fibonacci nel 1202 per descrivere la crescita di popolazione di conigli:

“ Un tizio lascia una coppia di conigli in un luogo circondato da mura. Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno, a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia dà alla luce una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese?

Liber Abaci, 1202

”

1. Scrivere il modello del sistema descritto da Fibonacci.
2. Valutare la stabilità del sistema descritto da Fibonacci.
3. Calcolare quante coppie di conigli ci saranno dopo un anno, secondo l'evoluzione descritta da Fibonacci.