

# **Esercitazione 04: Stabilità dei sistemi dinamici e sistemi interconnessi**

06 aprile 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos  
alessandro.papadopoulos@polimi.it

**Fondamenti di Automatica**  
Prof. M. Farina

## 1 Sistema lineare (non osservabile)

Si consideri il sistema lineare con ingresso  $u(t)$  ed uscita  $y(t)$  descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) - 4\alpha x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t) - 4x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$  è un parametro del sistema.

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. determinare per quali valori di  $\alpha$  il sistema è asintoticamente stabile
2. posto  $\alpha = 0$ , determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale  $x_1(0) = 1$  e  $x_2(0) = 1$  e all'ingresso  $u(t) = 3$ ,  $t \geq 0$
3. posto  $\alpha = 0$ , dire, motivando la risposta, se è possibile scegliere l'ingresso  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , in modo che lo stato evolva dalla condizione iniziale  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  al valore asintotico  $\bar{x}_1 = 4$  e  $\bar{x}_2 = 5$

## 2 Sistemi interconnessi

Si considerino i sistemi lineari  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ , descritti dalle seguenti equazioni:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ y_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_2(t) \\ y_2(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

I due sistemi vengono interconnessi come mostrato in Figura 1 per ottenere un sistema  $\mathcal{S}$  con ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$ .

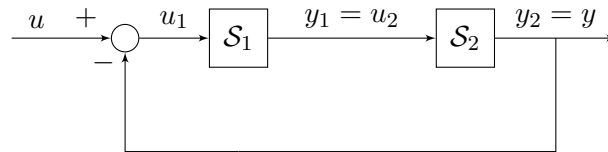


Figura 1: Sistema  $\mathcal{S}$  con ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$ .

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

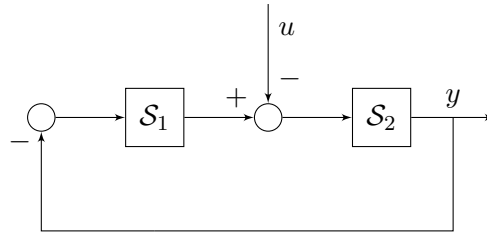
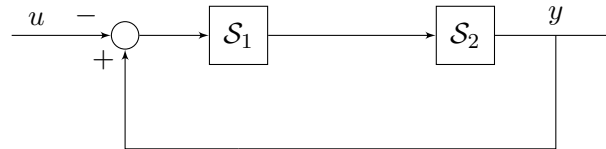
1. Discutere le proprietà di stabilità dei sistemi  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ , singolarmente.
2. Discutere le proprietà di stabilità della serie di  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ .
3. Scrivere le equazioni del sistema  $\mathcal{S}$  in variabili di stato.
4. Discutere le proprietà di stabilità del sistema  $\mathcal{S}$ .
5. Dire se le proprietà di stabilità del sistema interconnesso cambiano se i sistemi vengono interconnessi come in Figura 2 e 3.

## 3 Sistema non lineare

Si consideri il sistema non lineare con ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$  descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^2(t) + x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

Figura 2: Sistema  $\mathcal{S}$ , prima variante.Figura 3: Sistema  $\mathcal{S}$ , seconda variante.

1. Determinare il valore  $\bar{u}$  dell'ingresso  $u(t) = \bar{u}$ ,  $t \geq 0$ , a cui è associato l'equilibrio  $\bar{x} = [0 \ 0]^T$ .
2. Calcolare il movimento dello stato associato a

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad u(t) = 0, t \geq 0.$$

3. Valutare le proprietà di stabilità dello stato di equilibrio  $\bar{x} = [0 \ 0]^T$ , associato all'ingresso  $u(t) = \bar{u}$ ,  $t \geq 0$ .

## 4 Modello di crescita logistica di Verhulst

Si consideri il sistema non lineare senza ingresso descritto dalla equazione

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{k} \right), \quad r, k \in \mathbb{R}^+$$

che descrive l'evoluzione di una popolazione (modello logistico o equazione logistica). In particolare, si possono distinguere due contributi all'evoluzione della popolazione, e cioè

$$\dot{x}(t) = \overbrace{rx(t)}^{\blacktriangle} - \overbrace{\frac{r}{k}x^2(t)}^{\blacktriangledown}$$

in cui il termine  $\blacktriangle$  tiene conto della crescita della popolazione ( $r$ , tasso di crescita), proporzionalmente agli individui già presenti, mentre il termine  $\blacktriangledown$  tiene conto dell'effetto di "sovraffollamento", legato al numero di possibili incontri tra individui proporzionali a  $x^2(t)$  ( $k$ , capacità).

Calcolare quali sono gli stati di equilibrio del sistema al variare dei parametri  $r$  e  $k$  e discuterne la stabilità.

## 5 Pendolo inverso

Si consideri il sistema pendolo rappresentato in Figura 4.

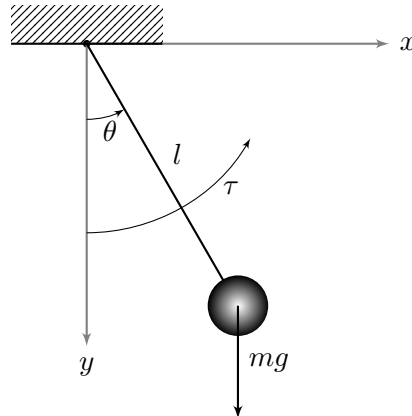


Figura 4: Sistema pendolo.

Si ipotizzi che la massa dell'asta a cui è sospesa la massa  $m$  sia trascurabile, così che il momento d'inerzia del pendolo sia  $J = ml^2$ . Si supponga inoltre che è anche presente un termine di dissipazione lineare con la velocità angolare (momento di attrito  $\tau_a(t) = k\dot{\theta}(t)$ ,  $k > 0$ ).

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Scrivere il modello del sistema in variabili di stato, considerando come uscita l'angolo di inclinazione del pendolo rispetto alla verticale, e come ingresso il momento torcente  $\tau(t)$  in figura.
2. Calcolare gli stati di equilibrio del sistema associati a ingresso nullo.
3. Discutere la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto precedente. Verificare che il pendolo presenta un equilibrio instabile.
4. Il pendolo viene retroazionato come mostrato in Figura 5. Trovare, se possibile, un valore costante per l'ingresso  $v(t) = \bar{v}$ ,  $t \geq 0$ , e un valore per il parametro  $p \in \mathbb{R}$  tali che il sistema retroazionato ammetta come stato di equilibrio lo stato di equilibrio instabile del pendolo trovato al punto precedente e che tale equilibrio sia asintoticamente stabile.

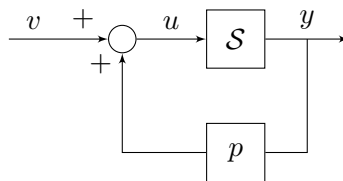


Figura 5: Sistema di controllo in retroazione del pendolo.