Esercitazione 04: Stabilità dei sistemi dinamici e sistemi interconnessi

06 aprile 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Sistema lineare (non osservabile)

Si consideri il sistema lineare con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) - 4\alpha x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t) - 4x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro del sistema.

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. determinare per quali valori di α il sistema è asintoticamente stabile
2. posto $\alpha = 0$, determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 1$ e all'ingresso $u(t) = 3$, $t \geq 0$
3. posto $\alpha = 0$, dire, motivando la risposta, se è possibile scegliere l'ingresso $u(t)$, $t \geq 0$, in modo che lo stato evolva dalla condizione iniziale $x_1(0) = x_2(0) = 0$ al valore asintotico $\overline{x}_1 = 4$ e $\overline{x}_2 = 5$

Soluzione

1. La matrice dinamica del sistema

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -4\alpha \\ \alpha & -4 \end{bmatrix}$$

ha come polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 4)^2 + 4\alpha^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 16 + 4\alpha^2.$$

Dato che $p_A(\lambda)$ è un polinomio di secondo grado, condizione necessaria e sufficiente affinché le sue radici (e cioè gli autovalori di A) abbiano tutte parte reale strettamente negativa è che i coefficienti di $p_A(\lambda)$ siano tutti non nulli e concordi in segno. Questa condizione è soddisfatta per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Quindi, per il criterio degli autovalori, il sistema è asintoticamente stabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Per $\alpha = 0$ si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -4x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Dato che le equazioni di stato sono identiche, così come le condizioni iniziali $x_1(0) = x_2(0) = 1$, allora $x_1(t) = x_2(t)$, $t \geq 0$, e quindi $y(t) = 2x_1(t)$, $t \geq 0$.

Basta quindi determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + u(t),$$

quando $x_1(0) = 1$ e $u(t) = 3$, $t \geq 0$. Essa è

$$x_1(t) = e^{-4t}x_1(0) + \int_0^t e^{-4(t-\tau)}u(\tau)d\tau = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4t}, \ t \geq 0,$$

da cui segue:

$$y(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-4t}, \ t \geq 0.$$

3. No, non è possibile scegliere l'ingresso $u(t)$, $t \geq 0$, in modo che lo stato evolva dalla condizione iniziale $x_1(0) = x_2(0) = 0$ al valore asintotico $\overline{x}_1 = 4$ e $\overline{x}_2 = 5$ con $\alpha = 0$.

   Questo perché, per $\alpha = 0$, si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -4x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

   e quindi, dato che le equazioni di stato sono identiche ed anche le condizioni iniziali, si ha che $x_1(t) = x_2(t)$, $t \geq 0$, qualunque sia l'ingresso. Non è possibile perciò che il valore asintotico di $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sia diverso.

2 Sistemi interconnessi

Si considerino i sistemi lineari $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, descritti dalle seguenti equazioni:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ y_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_2(t) \\ y_2(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

I due sistemi vengono interconnessi come mostrato in Figura 1 per ottenere un sistema $\mathcal{S}$ con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

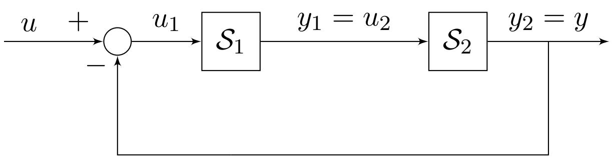

Figura 1: Sistema $\mathcal{S}$ con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Discutere le proprietà di stabilità dei sistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, singolarmente.
2. Discutere le proprietà di stabilità della serie di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.
3. Scrivere le equazioni del sistema $\mathcal{S}$ in variabili di stato.
4. Discutere le proprietà di stabilità del sistema $\mathcal{S}$.
5. Dire se le proprietà di stabilità del sistema interconnesso cambiano se i sistemi vengono interconnessi come in Figura 2 e 3.

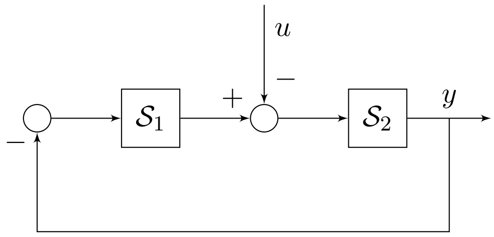

Figura 2: Sistema $\mathcal{S}$, prima variante.

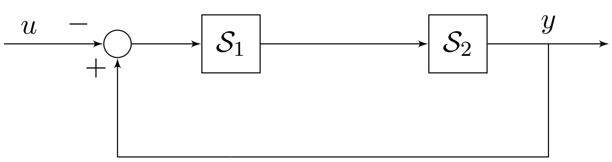

Figura 3: Sistema $\mathcal{S}$, seconda variante.

Soluzione

1. Il sistema $\mathcal{S}_1$ ha un solo autovalore $\lambda_1 = 0$. Dato che l'autovalore ha parte reale nulla, il sistema è semplicemente stabile. Il sistema $\mathcal{S}_2$ ha anch'esso un unico autovalore $\lambda_2 = 1$. Dato che λ_2 ha parte reale strettamente positiva, $\mathcal{S}_2$ è instabile.
2. Il sistema risultante dalla serie di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ ha come autovalori l'unione dei due autovalori. Dato che il sistema $\mathcal{S}_2$ ha un autovalore con parte reale strettamente positiva, la serie dei due sistemi è instabile.

3. L'uscita di $\mathcal{S}_1$ diventa l'ingresso di $\mathcal{S}_2$, per questo vale la relazione $y_1(t) = u_2(t)$. L'uscita $y(t)$ del sistema $\mathcal{S}$ è uguale all'uscita $y_2(t)$ del sistema $\mathcal{S}_2$. Inoltre, l'ingresso $u_1(t)$ di $\mathcal{S}_1$ è dato dall'ingresso $u(t)$ a cui viene sottratta l'uscita $y(t)$ del sistema $\mathcal{S}$.

   Il sistema $\mathcal{S}$ è, quindi, lineare e descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 2x_2(t) \end{cases}.$$

4. La matrice dinamica A del sistema $\mathcal{S}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   Per valutare la stabilità di $\mathcal{S}$ si può calcolare il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$$

   Essendo il polinomio caratteristico di grado 2 e avendo tutti i coefficienti concordi in segno e non nulli, allora gli autovalori sono entrambi con parte reale strettamente negativa, e il sistema $\mathcal{S}$ è asintoticamente stabile.

5. La proprietà di stabilità di un sistema lineare non dipende dall'ingresso. Quello che conta è il modo in cui $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sono connessi. Ponendo $u(t) = 0$, $t \geq 0$, il sistema in Figura 2, è identico a quello in Figura 1. Dunque le proprietà di stabilità non cambiano.

   Se si pone $u(t) = 0$, $t \geq 0$, il sistema in Figura 3 non è identico a quello in Figura 1.

   Analizzando le proprietà di stabilità del sistema in Figura 3, esso è lineare e descritto da:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) = y(t) - u(t) = 2x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_2(t) = x_2(t) - y_1(t) = x_2(t) + x_1(t) - u(t) + 2x_2(t) \\ y(t) = y_2(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

   cioè

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + 3x_2(t) - u(t) \\ y(t) = 2x_2(t) \end{cases}.$$

   Per valutare la stabilità, si può calcolare il polinomio caratteristico di

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   ottenendo

$$p_A(\lambda) = \det\left(\lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 3\lambda - 2$$

   e osservare che i suoi coefficienti non sono concordi in segno, quindi gli autovalori di A non sono entrambi con parte reale strettamente negativa. Il sistema non è quindi asintoticamente stabile. Calcolando gli autovalori

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \simeq 3.5616, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \simeq -0.5616$$

   si può concludere che il sistema è instabile dato che $\Re(\lambda_1) = \lambda_1 > 0$.

3 Sistema non lineare

Si consideri il sistema non lineare con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^2(t) + x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Determinare il valore $\overline{u}$ dell'ingresso $u(t) = \overline{u}$, $t \geq 0$, a cui è associato l'equilibrio $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.
2. Calcolare il movimento dello stato associato a
$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad u(t) = 0, t \geq 0.$$
3. Valutare le proprietà di stabilità dello stato di equilibrio $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, associato all'ingresso $u(t) = \overline{u}$, $t \geq 0$.

Soluzione

1. Per determinare il valore di $u(t) = \overline{u}$, $t \geq 0$, tale che lo stato di equilibrio corrispondente sia $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, si può applicare la condizione di equilibrio
$$\begin{cases} -\overline{x}_1 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_2\overline{u} = 0 \\ 3\overline{x}_2 + \overline{u} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{x}_1 = -2\overline{x}_2^2 \\ \overline{u} = -3\overline{x}_2 \end{cases}$$
La prima equazione valutata in $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ è soddisfatta, quindi l'equilibrio richiesto è un possibile equilibrio del sistema. Dalla seconda equazioni si ottiene che $\overline{u} = 0$ è l'ingresso a cui lo stato di equilibrio richiesto è associato.
2. Si può notare che l'evoluzione di $x_2(t)$ è indipendente dall'evoluzione di $x_1(t)$. Si può quindi calcolare il movimento di $x_2(t)$ associato alla condizione iniziale e all'ingresso dati. Risolvendo quindi l'equazione differenziale lineare
$$\dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t)$$
quando $x_2(0) = \varepsilon$ e $u(t) = 0$, $t \geq 0$. Applicando la formula di Lagrange, si ricava
$$x_2(t) = e^{3t}\varepsilon, \quad t \geq 0.$$
A questo punto si può calcolare il movimento di $x_1(t)$ risolvendo
$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)^2 + x_2(t)u(t)$$
quando $x_1(0) = 0$ e $x_2(t) = e^{3t}\varepsilon$, $u(t) = 0$ $t \geq 0$. L'equazione differenziale, diventa
$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \left(e^{3t}\varepsilon\right)^2 + e^{3t}\varepsilon \cdot 0 = -x_1(t) + e^{6t}\varepsilon^2$$
che è lineare e si può quindi risolvere applicando ancora la formula di Lagrange
$$\begin{aligned} x_1(t) =& e^{-t}0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)}e^{6\tau}\varepsilon \, d\tau \\ =& \frac{1}{7}\varepsilon^2 \left(e^{6t} - e^{-t}\right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Il movimento dello stato risulta essere quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{7}\varepsilon^2\left(e^{6t} - e^{-t}\right) \\ x_2(t) = e^{3t}\varepsilon \end{cases} \quad , \quad t \geq 0 \tag{1}$$

3. Ci sono due possibili modi per verificare se lo stato di equilibrio $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ del sistema associato all'ingresso $u(t) = 0$, $t \geq 0$, è asintoticamente stabile:

   (a) Nel punto precedente, si è calcolato il movimento associato alla condizione iniziale

   $$x(0) = \overline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

   e all'ingresso $u(t) = \overline{u} = 0$, $t \geq 0$. Si noti che $x(0)$ è una condizione iniziale perturbata rispetto allo stato di equilibrio

   $$\overline{x} \to \overline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}}_{\Delta x_0}$$

   Se si analizza il movimento perturbato in (1) per $t \to \infty$, entrambe le variabili di stato divergono, allontanandosi dall'equilibrio, per ogni perturbazione di entità ε ($\varepsilon \simeq 0$), anche arbitrariamente piccola. Di conseguenza lo stato di equilibrio è instabile.

   (b) Alternativamente, si sarebbe potuto linearizzare il sistema intorno all'equilibrio. Il sistema linearizzato sarà della forma

   $$\begin{cases} \dot{\Delta x}(t) = A(\overline{x}, \overline{u})\,\Delta x(t) + B(\overline{x}, \overline{u})\,\Delta u(t) \\ \Delta y(t) = C(\overline{x}, \overline{u})\,\Delta x(t) \end{cases}$$

   con

   $$A(\overline{x}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\overline{x},\overline{u}} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\overline{x},\overline{u}} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \end{bmatrix}, B(\overline{x}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \end{bmatrix}, C(\overline{x}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{\overline{x},\overline{u}} & \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \end{bmatrix}$$

   In particolare, basta calcolare la matrice $A(\overline{x}, \overline{u})$ e ricavare i suoi autovalori. La matrice $A(\overline{x}, \overline{u})$ è diagonale e pari a

   $$A(\overline{x}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   I suoi autovalori sono quindi

   $$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$$

   Si noti che $\Re(\lambda_2) > 0$, che è condizione sufficiente per concludere che l'equilibrio è instabile.

4 Modello di crescita logistica di Verhulst

Si consideri il sistema non lineare senza ingresso descritto dalla equazione

$$\dot{x}(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right), \quad r, k \in \mathbb{R}^+$$

che descrive l'evoluzione di una popolazione (modello logistico o equazione logistica). In particolare, si possono distinguere due contributi all'evoluzione della popolazione, e cioè

$$\dot{x}(t) = \overbrace{rx(t)}^{\blacktriangle} - \overbrace{\frac{r}{k}x^2(t)}^{\blacktriangledown}$$

in cui il termine ▲ tiene conto della crescita della popolazione (r, tasso di crescita), proporzionalmente agli individui già presenti, mentre il termine ▼ tiene conto dell'effetto di "sovraffollamento", legato al numero di possibili incontri tra individui proporzionali a $x^2(t)$ (k, capacità).

Calcolare quali sono gli stati di equilibrio del sistema al variare dei parametri r e k e discuterne la stabilità.

Soluzione

Si possono calcolare analiticamente i punti di equilibrio del sistema

$$r\overline{x}\left(1 - \frac{\overline{x}}{k}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_a = 0, \quad \overline{x}_b = k$$

Per discutere la stabilità degli stati di equilibrio si può utilizzare il metodo basato sulla linearizzazione, oppure il metodo grafico dato che il sistema è del primo ordine.

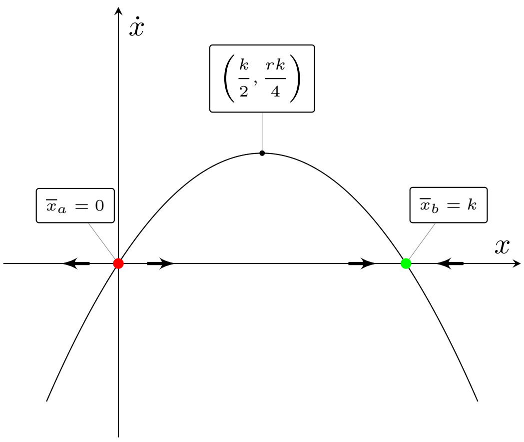

Figura 4: Analisi tramite metodo grafico.

Analizzando il segno di $\dot{x}(t)$, come mostrato in Figura 4, si può concludere che l'equilibrio $\overline{x}_a$ è instabile, mentre l'equilibrio $\overline{x}_b$ è asintoticamente stabile.

Allo stesso risultato si poteva arrivare linearizzando il sistema nell'intorno dei due equilibri. La matrice dinamica $A(\overline{x})$ è uno scalare, e coincide con il suo unico autovalore. Tale scalare è il coefficiente angolare della retta tangente in $\overline{x}_a$ e in $\overline{x}_b$, ed è positivo in $\overline{x}_a$ e negativo in $\overline{x}_b$.

Al variare dei parametri il punto di massimo della curva cambia, così come l'equilibrio $\overline{x}_b$, ma, dato che sia r che k sono parametri sempre positivi, le proprietà di stabilità del sistema non sono alterate.

5 Pendolo inverso

Si consideri il sistema pendolo rappresentato in Figura 5.

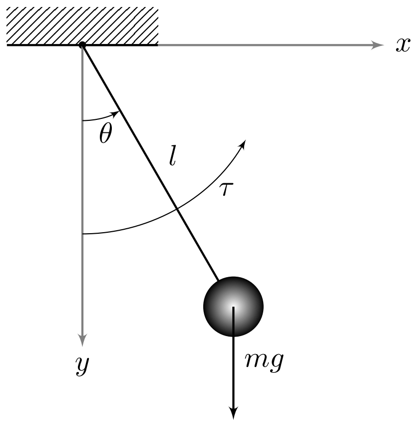

Figura 5: Sistema pendolo.

Si ipotizzi che la massa dell'asta a cui è sospesa la massa m sia trascurabile, così che il momento d'inerzia del pendolo sia $J = ml^2$. Si supponga inoltre che è anche presente un termine di dissipazione lineare con la velocità angolare (momento di attrito $\tau_a(t) = k\dot{\theta}(t)$, $k > 0$).

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Scrivere il modello del sistema in variabili di stato, considerando come uscita l'angolo di inclinazione del pendolo rispetto alla verticale, e come ingresso il momento torcente $\tau(t)$ in figura.
2. Calcolare gli stati di equilibrio del sistema associati a ingresso nullo.
3. Discutere la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto precedente. Verificare che il pendolo presenta un equilibrio instabile.
4. Il pendolo viene retroazionato come mostrato in Figura 6. Trovare, se possibile, un valore costante per l'ingresso $v(t) = \overline{v}$, $t \geq 0$, e un valore per il parametro $p \in \mathbb{R}$ tali che il sistema retroazionato ammetta come stato di equilibrio lo stato di equilibrio instabile del pendolo trovato al punto precedente e che tale equilibrio sia asintoticamente stabile.

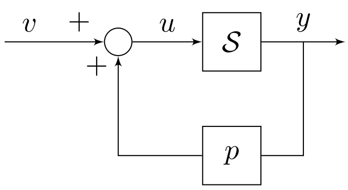

Figura 6: Sistema di controllo in retroazione del pendolo.

Soluzione

1. Le equazioni che descrivono la dinamica del pendolo sono

$$J\ddot{\theta}(t) = \tau(t) - \tau_a(t) - mgl\sin(\theta(t)), \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta}(t) = \tau(t) - k\dot{\theta}(t) - mgl\sin(\theta(t)).$$

Indicando con

$$x_1(t) = \theta(t), \quad x_2(t) = \dot{\theta}(t), \quad u(t) = \tau(t), \quad y(t) = \theta(t)$$

si può descrivere il sistema nelle variabili di stato $x_1(t)$ e $x_2(t)$ come:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \dfrac{k}{ml^2}x_2(t) + \dfrac{u(t)}{ml^2} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

2. Dalla fisica del problema, e limitando il dominio di $x_1(t) \in [0, 2\pi)$, si sa che gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso nullo ($u = \overline{u} = 0$) sono i seguenti

$$P_1 : \begin{cases} \overline{x}_1 = 0 \\ \overline{x}_2 = 0 \end{cases} \quad , \qquad P_2 : \begin{cases} \overline{x}_1 = \pi \\ \overline{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Essi si possono calcolare imponendo le condizioni di equilibrio

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \overline{x}_2 = 0 \\ \overline{y} = \overline{x}_1 \end{cases}$$

Si noti che si hanno infiniti equilibri, ma da un punto di vista fisico sono solo due, cioè scegliendo $k \in \{0, 1\}$:

$$E_1 : \begin{cases} \overline{x}_1 = 0 \\ \overline{x}_2 = 0 \\ \overline{y} = 0 \end{cases} \qquad E_2 : \begin{cases} \overline{x}_1 = \pi \\ \overline{x}_2 = 0 \\ \overline{y} = 0 \end{cases}$$

che sono esattamente gli stati di equilibrio che ci si aspetta di trovare sulla base di considerazioni fisiche sul sistema.

3. Per studiare la stabilità degli stati di equilibrio, si linearizza il sistema nel loro intorno

$$\begin{cases} \dot{\Delta x}_1(t) = \Delta x_2(t) \\ \dot{\Delta x}_2(t) = -\dfrac{g}{l}\cos(\overline{x}_1)\Delta x_1(t) - \dfrac{k}{ml^2}\Delta x_2(t) + \dfrac{1}{ml^2}\Delta u(t) \\ \Delta y(t) = \Delta x_1(t) \end{cases}$$

in cui la matrice dinamica è

$$A(\overline{x}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l}\cos(\overline{x}_1) & -\dfrac{k}{ml^2} \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $A(\overline{x}, \overline{u})$ è:

$$p_{A(\overline{x},\overline{u})}(\lambda) = \det(\lambda I - A(\overline{x}, \overline{u})) = \lambda^2 + \frac{k}{ml^2}\lambda + \frac{g}{l}\cos(\overline{x_1}).$$

Dato che il polinomio caratteristico è di secondo grado, gli autovalori di $A(\overline{x}, \overline{u})$ sono a parte reale strettamente negativa se e solo se i coefficienti del polinomio caratteristico sono concordi in segno. Se si considera $\overline{x}_1 = 0$, $\cos(0) = 1$, quindi i coefficienti sono tutti concordi. Di conseguenza, si può concludere che E_1 è asintoticamente stabile. Se $\overline{x}_1 = \pi$ il polinomio caratteristico ha almeno una radice con parte reale positiva, per cui l'equilibrio E_2 è instabile (non può accadere che abbia parte reale nulla perché $g/l > 0$ e $k/(ml^2) > 0$).

4. Le equazioni del sistema retroazionato mostrato in Figura 6 sono:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{g}{l}\sin(x_1(t)) + \dfrac{p}{ml^2}x_1(t) - \dfrac{k}{ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{ml^2}v(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Gli stati di equilibrio del sistema retroazionato associati all'ingresso costante $v(t) = \overline{v}$, $t \geq 0$, sono:

$$\begin{cases} mgl\sin(\overline{x}_1) - p\overline{x}_1 = \overline{v} \\ \overline{x}_2 = 0 \\ \overline{y} = \overline{x}_1 \end{cases}$$

Quello che si vuole trovare è l'ingresso $v(t) = \overline{v}$, $t \geq 0$ tale per cui il sistema retroazionato ammette come equilibrio

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

$\overline{v}$ deve soddisfare:

$$\begin{cases} mgl\sin(\pi) - p\pi = \overline{v} \\ 0 = 0 \\ \overline{y} = \pi \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \overline{v} = -p\pi.$$

Il valore $\overline{v}$ non garantisce nulla sulle proprietà di stabilità del suddetto equilibrio.

Per imporre che lo stato di equilibrio associato a $v(t) = \overline{v}$, $t \geq 0$ sia asintoticamente stabile, si ricava la matrice dinamica del sistema linearizzato nel suo intorno:

$$A(\overline{x}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(\overline{x},\overline{v})} & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(\overline{x},\overline{v})} \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(\overline{x},\overline{v})} & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(\overline{x},\overline{v})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{p}{ml^2} - \dfrac{g}{l}\cos(\overline{x}_1) & -\dfrac{k}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{p}{ml^2} + \dfrac{g}{l} & -\dfrac{k}{ml^2} \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, v) &= x_2 \\ f_2(x_1, x_2, v) &= -\frac{g}{l}\sin(\overline{x}_1) + \frac{p}{ml^2}\overline{x}_1 - \frac{k}{ml^2}\overline{x}_2 + \frac{1}{ml^2}\overline{v}. \end{aligned}$$

Per individuare le condizioni per l'asintotica stabilità dell'equilibrio, si possono utilizzare le condizioni necessarie e sufficienti (per i sistemi del secondo ordine) affinché gli autovalori della matrice $A(\overline{x}, \overline{u})$ abbiano entrambi parte reale strettamente negativa:

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(A(\overline{x}, \overline{u})) < 0 \\ \det(A(\overline{x}, \overline{u})) > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\dfrac{k}{ml^2} < 0 \\ -\dfrac{p}{ml^2} - \dfrac{g}{l} > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p < -mlg.$$

Prendendo, per esempio $m = 1$, $l = 1$ e $k = 0.5$, scegliendo $p = -10$ e $\overline{v} = -p\pi = 10\pi$, allora (2) è stato equilibrio asintoticamente stabile del sistema retroazionato. La Figura 7 mostra il comportamento del sistema retroazionato associato alla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} \pi/3 & 0 \end{bmatrix}^T$ e all'ingresso $v(t) = 10\pi$, $t \geq 0$. Il sistema progettato è un pendolo controllato.

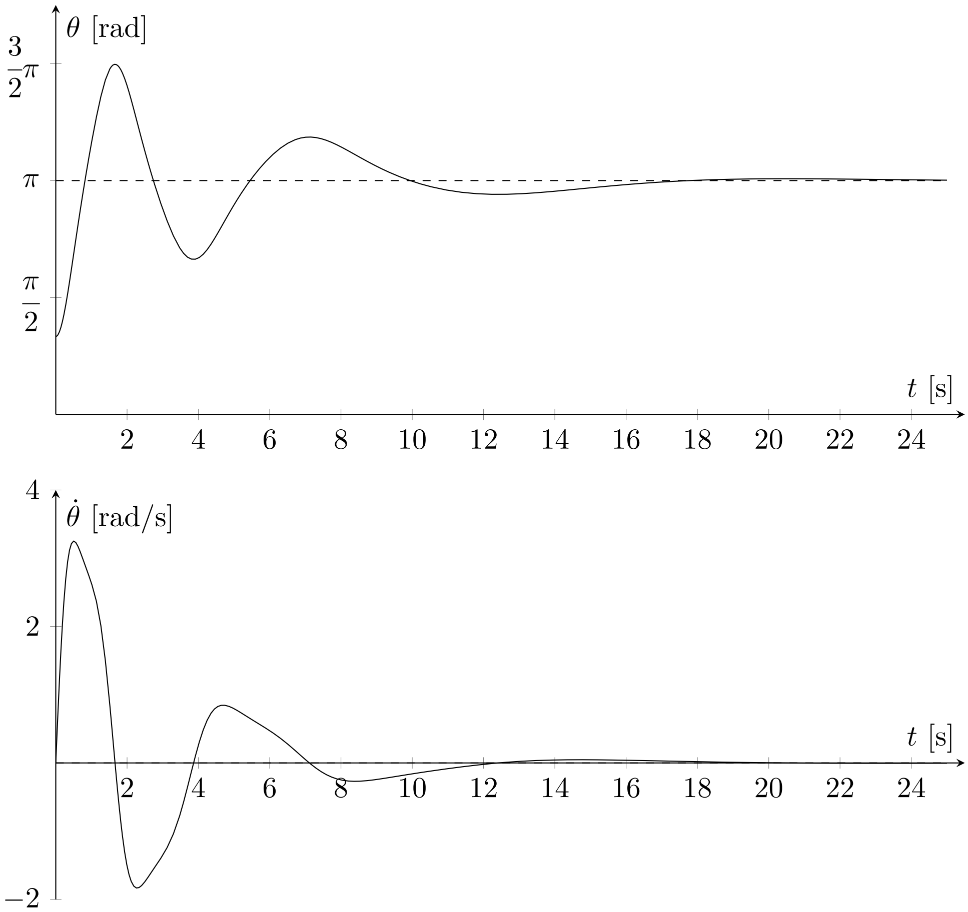

Figura 7: Simulazione del pendolo inverso controllato.