# Esercitazione 05: Trasformata di Laplace e funzione di trasferimento

13 aprile 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

**Fondamenti di Automatica**
Prof. M. Farina

# 1 Risposta allo scalino

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

con $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Valutare la stabilità del sistema.
3. Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
4. Si determini l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ a fronte di un ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.

# 2 Stabilità e funzione di trasferimento

Dato il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$.
2. Si dica se il sistema è asintoticamente stabile.

# 3 Risposta all'esponenziale

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t) \\ y(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

con $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Si valuti la stabilità del sistema.
3. Si calcoli l'espressione analitica della risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$.
4. Si calcoli l'espressione analitica della risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{t}$, $t \geq 0$.

# 4 Movimento del sistema

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 9u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ e valutare la stabilità del sistema.
2. Determinare l'espressione analitica $y(t)$ della risposta a $u(t) = e^{-3t}$, $t \geq 0$.
3. Verificare la correttezza dell'espressione applicando, se possibile, i teoremi del valore iniziale e finale.
4. Determinare il movimento dell'uscita associato a

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u(t) = e^{-3t}, t \geq 0.$$

# 5 Poli multipli

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_1(t) - 3x_3(t) - u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Valutare la stabilità del sistema.
3. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema.
4. Determinare l'espressione analitica $y(t)$ della risposta a $u(t) = \mathrm{sca}(t)$, $t \geq 0$.

# 6 Sistema a fase non minima

Si consideri il sistema lineare di ordine 3 avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s-1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

1. Si verifichino le proprietà di stabilità del sistema (si può, a questo scopo, utilizzare il criterio di Routh Hurwitz).
2. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta all'ingresso $u(t) = \mathrm{sca}(t)$.