Esercitazione 05: Trasformata di Laplace e funzione di trasferimento

13 aprile 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Risposta allo scalino

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

con $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Valutare la stabilità del sistema.
3. Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
4. Si determini l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ a fronte di un ingresso $u(t) = \mathrm{sca}(t)$.

Soluzione

1. Per il calcolo della F.d.T., si può utilizzare la definizione

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D,$$

oppure si può applicare la trasformata di Laplace dei membri delle singole equazioni. Utilizziamo questo secondo approccio:

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = -2X_1(s) - 3X_2(s) + U(s) \\ Y(s) = 3X_1(s) + X_2(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2}U(s) \\ X_2(s) = \dfrac{s}{s^2+3s+2}U(s) \\ Y(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}U(s) \end{cases}$$

Pertanto

$$\frac{Y(s)}{U(s)} := G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

2. Dato che il numero di poli della F.d.T. (ossia le radici del denominatore della F.d.T.) sono pari all'ordine del sistema, essi sono tutti e soli gli autovalori del sistema. In particolare, si ha che:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Dato che gli autovalori sono entrambi reali e negativi, il sistema è asintoticamente stabile.

3. Per tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema si può calcolare l'espressione dell'uscita in trasformata di Laplace, sapendo che:

$$U(s) := \mathcal{L}\left[u(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[\mathrm{sca}(t)\right](s) = \frac{1}{s},$$

allora:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}.$$

Si possono quindi sfruttare il Teorema del Valore Iniziale (TVI) e il Teorema del Valore Finale (TVF) per capire l'andamento iniziale e finale di $y(t)$. In particolare

- Per capire da dove parte la risposta allo scalino, si può applicare il TVI:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = 0.$$

- Per capire con che pendenza parte la risposta allo scalino, si può applicare il TVI:

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,(sY(s) - y(0)) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 \cdot \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = 1.$$

- Per capire a che valore tende la risposta allo scalino, si può applicare il TVF. Le condizioni di applicabilità sono soddisfatte dato che tutti i poli di $Y(s)$ hanno parte reale strettamente negativa (o sono nell'origine). Il valore di regime dell'uscita è quindi:

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3}{2}.$$

- Per capire in quanto tempo si esaurisce il transitorio del sistema, si analizzano le costanti di tempo del sistema:

$$\tau_1 = \frac{1}{|\lambda_1|} = \frac{1}{1} = 1, \quad \tau_2 = \frac{1}{|\lambda_2|} = \frac{1}{2}.$$

  La **costante di tempo dominante** del sistema (ossia quella associata al transitorio che si esaurisce più lentamente) è τ_1. Quindi, il transitorio del sistema si esaurisce in $T_a \simeq 5\tau_1 = 5$ unità di tempo.

L'andamento della risposta allo scalino del sistema è mostrato in Figura 1.

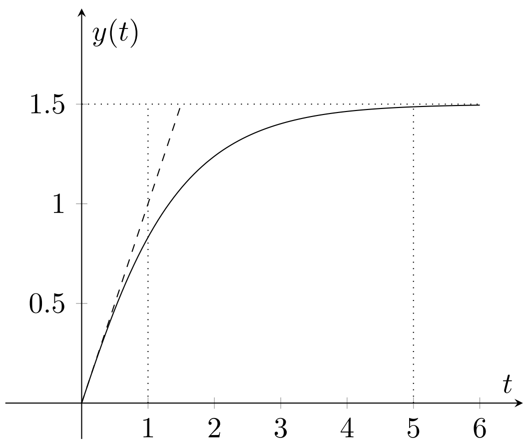

Figura 1: Risposta allo scalino del sistema.

4. Per calcolare l'espressione analitica della risposta allo scalino del sistema si può antitrasformare $Y(s)$. Si può quindi scomporre l'espressione di $Y(s)$ come somma di espressioni fratte più semplici:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+2}.$$

Per trovare i valori di α_1, α_2 e di α_3, si può sviluppare l'espressione a destra dell'uguale e imporre che il numeratore dell'espressione a sinistra sia uguale al numeratore dell'espressione a destra:

$$\begin{aligned}
\frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} &= \frac{\alpha_1(s+1)(s+2) + \alpha_2 s(s+2) + \alpha_3 s(s+3)}{s(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{2\alpha_1 + 3s\alpha_1 + \alpha_1 s^2 + 2\alpha_2 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_3 s^2}{(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)s^2 + (3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)s + 2\alpha_1}{(s+1)(s+2)}
\end{aligned}$$

Si può quindi risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3}{2} \\ \alpha_2 = -\dfrac{3}{2} - \alpha_3 \\ \dfrac{9}{2} - 3 - 2\alpha_3 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3}{2} \\ \alpha_2 = -\dfrac{3}{2} - \alpha_3 \\ \alpha_3 = \dfrac{9}{2} - 3 - 1 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3}{2} \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = \dfrac{9}{2} - 3 - 1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si può quindi sfruttare la proprietà di linearità dell'operatore antitrasformata di Laplace, ottenendo l'espressione:

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+2}\right](t) = \\ = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 e^{-2t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori di α_1, α_2 e α_3 trovati, si ottiene:

$$y(t) = \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

2 Stabilità e funzione di trasferimento

Dato il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$.
2. Si dica se il sistema è asintoticamente stabile.

Soluzione

1. Le matrici del sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Per calcolare la funzione di trasferimento (F.d.T.) dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$, si può applicare la definizione di F.d.T.:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &:= G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ 0 & s & -1 \\ -1 & 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \alpha_{31} & \star & \star \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in cui:

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= (s-1)s(s+2) - (s - (s-1)) = s^3 + s^2 - 2s - 1 \\ \alpha_{31} &= \Delta_{13} = (-1)^{1+3}s = s, \end{aligned}$$

da cui si ottiene che:

$$G(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 - 2s - 1}.$$

2. Poiché il denominatore non ha coefficienti tutti concordi in segno, è violata la condizione necessaria per l'asintotica stabilità: il sistema non è asintoticamente stabile. Inoltre, dato che i coefficienti del denominatore cambiano di segno una sola volta, si sa che esiste un autovalore con parte reale strettamente positiva.

3 Risposta all'esponenziale

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t) \\ y(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

con $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Si valuti la stabilità del sistema.
3. Si calcoli l'espressione analitica della risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$.
4. Si calcoli l'espressione analitica della risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{t}$, $t \geq 0$.

Soluzione

1. Le matrici del sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

   Per calcolare la funzione di trasferimento (F.d.T.) dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$, si può applicare la definizione di F.d.T.:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} := G(s) &= C\,(sI - A)^{-1}\,B + D \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

2. Il denominatore della F.d.T. è dello stesso ordine della matrice A del sistema, per cui esso coincide con il polinomio caratteristico di A. Dato che le radici del denominatore della F.d.T. sono $s = -2$ ed $s = -3$, il sistema è asintoticamente stabile per il criterio degli autovalori.

3. L'ingresso $u(t) = e^{2t}$ ha trasformata di Laplace:

$$U(s) = \mathcal{L}\left[e^{2t}\right](s) = \frac{1}{s-2}.$$

   Si può quindi calcolare l'espressione dell'uscita nel dominio delle trasformate come:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{1}{s-2}.$$

   Si può ottenere l'espressione dell'uscita $y(t)$ antitrasformando $Y(s)$, scomponendola in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s-2)} &= \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} + \frac{\alpha_3}{s-2} \\ &= \frac{\alpha_1(s+3)(s-2) + \alpha_2(s+2)(s-2) + \alpha_3(s+2)(s+3)}{(s+2)(s+3)(s-2)} \end{aligned}$$

   Quindi deve valere che:

$$s - 1 = \alpha_1(s+3)(s-2) + \alpha_2(s+2)(s-2) + \alpha_3(s+2)(s+3)$$

   Dato che questa relazione deve valere per ogni valore della variabile complessa s, si possono sostituire in maniera opportuna dei valori di s per ottenere le equazioni necessarie per trovare i parametri α_1, α_2 e α_3:

- Sostituendo $s = -2$:

$$-2-1 = \alpha_1(-2+3)(-2-2), \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{3}{4}$$

- Sostituendo $s = -3$:

$$-3-1 = \alpha_2(-3+2)(-3-2), \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{4}{5}$$

- Sostituendo $s = 2$:

$$2-1 = \alpha_3(2+2)(2+3), \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{1}{20}$$

Per cui l'espressione analitica dell'uscita è:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s-2)}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} + \frac{\alpha_3}{s-2}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{s+3}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_3}{s-2}\right](t) \\ &= \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-3t} + \alpha_3 e^{2t} \\ &= \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{20}e^{2t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Il grafico dell'uscita è riportato in Figura 2.

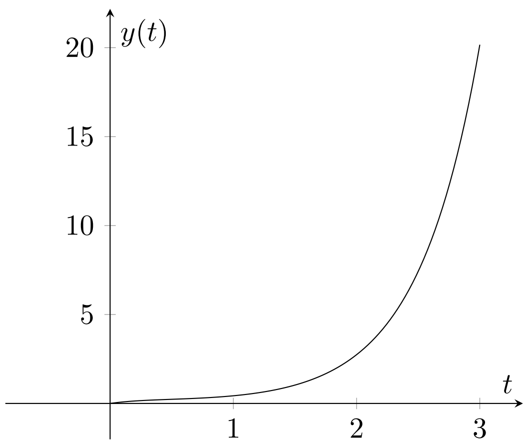

Figura 2: Risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{2t}$.

4. L'ingresso $u(t) = e^t$ ha trasformata di Laplace:

$$U(s) = \mathcal{L}\left[e^t\right](s) = \frac{1}{s-1}.$$

Si può quindi calcolare l'espressione dell'uscita nel dominio delle trasformate come:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}.$$

Si può ottenere l'espressione dell'uscita $y(t)$ antitrasformando $Y(s)$, scomponendola in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} &= \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} \\ &= \frac{\alpha_1(s+3) + \alpha_2(s+2)}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Quindi deve valere che:

$$1 = \alpha_1(s+3) + \alpha_2(s+2)$$

Dato che questa relazione deve valere per ogni valore della variabile complessa s, si possono sostituire in maniera opportuna dei valori di s per ottenere le equazioni necessarie per trovare i parametri α_1 e α_2:

- Sostituendo $s = -2$:

$$1 = \alpha_1(-2+3), \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 1$$

- Sostituendo $s = -3$:

$$1 = \alpha_2(-3+2), \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -1$$

Per cui l'espressione analitica dell'uscita è:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{s+3}\right](t) \\ &= \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-3t} \\ &= e^{-2t} - e^{-3t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Il grafico dell'uscita è riportato in Figura 3.

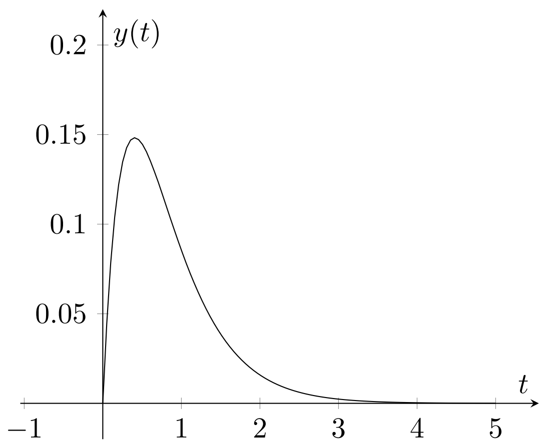

Figura 3: Risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^t$.

Osservazione 1. *Notare che nonostante si applichi un ingresso esponenziale che tende a infinito per $t \to \infty$, l'uscita non diverge. Ciò è legato al fatto che il contributo dell'ingresso è* bloccato *dallo zero della F.d.T.. Questa proprietà è detta anche* ***proprietà bloccante degli zeri****.*

4 Movimento del sistema

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 9u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ e valutare la stabilità del sistema.

2. Determinare l'espressione analitica $y(t)$ della risposta a $u(t) = e^{-3t}$, $t \geq 0$.

3. Verificare la correttezza dell'espressione applicando, se possibile, i teoremi del valore iniziale e finale.

4. Determinare il movimento dell'uscita associato a

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u(t) = e^{-3t}, t \geq 0.$$

Soluzione

1. Si può calcolare la F.d.T. utilizzando la trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = -X_2(s) + 9U(s) \\ Y(s) = X_1(s) + X_2(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) \\ X_2(s) = \dfrac{9}{s+1}U(s) \\ Y(s) = \dfrac{10}{s+1}U(s) \end{cases} \Rightarrow \quad G(s) = \frac{10}{s+1}$$

Il sistema ha un autovalore nascosto. Infatti

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Il sistema è asintoticamente stabile dato che entrambi gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa.

2. L'espressione dell'uscita del sistema in trasformata di Laplace è:

$$Y(s) = \frac{10}{s+1} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{10}{(s+1)(s+3)} = \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta}{s+3} = \frac{\alpha(s+3) + \beta(s+1)}{(s+1)(s+3)}$$

Deve quindi valere che:

$$10 = \alpha(s+3) + \beta(s+1)$$

- Sostituendo $s = -1$:

$$10 = \alpha(-1+3), \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5$$

- Sostituendo $s = -3$:

$$10 = \beta(-3+1), \quad \Rightarrow \quad \beta = -5$$

$$y(t) = 5e^{-t} - 5^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

3. Nel punto precedente abbiamo trovato che:

$$y(t) = 5e^{-t} - 5e^{-3t}$$

da cui si può verificare facilmente che

$$y(0) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

Verifichiamo questi risultati con il teorema del valore iniziale (TVI) e con il teorema del valore finale (TVF)

- TVI:

$$y(0) = \lim_{s\to+\infty} sY(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{10s}{(s+1)(s+3)} = 0$$

Osservazione 2. *Accade sempre che $y(0) = 0$ se $G(s)$ è strettamente propria.*

- TVF: Dato che $Y(s)$ è strettamente propria e ha radici del denominatore in $s = -1$ e $s = -3$, si può applicare il TVF. Il valore di regime dell'uscita è quindi:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10s}{(s+1)(s+3)} = 0$$

4. Per il principio di sovrapposizione degli effetti vale che

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

in cui il movimento forzato dell'uscita è dato dall'espressione $y_F(t) = 5e^{-t} - 5e^{-3t}$.

Per calcolare il movimento libero possiamo fare la combinazione lineare dei modi del sistema. Calcoliamo, quindi gli autovalori del sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Dato che A è diagonale, la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore coincidono. Si ha quindi un solo modo del sistema e^{-t}. Quindi $y_L(t)$ è dato da

$$\begin{cases} y_L(t) = \gamma e^{-t}, t \geq 0 \\ y_L(0) = x_1(0) + x_2(0) = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 3$$

Da cui

$$y_L(t) = 3e^{-t}, t \geq 0.$$

Componendo i risultati precedentemente ottenuti, otteniamo che

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t) = 3e^{-t} + 5e^{-t} - 5e^{-3t} = 8e^{-t} - 5e^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

Alternativamente si poteva trasformare il sistema utilizzando le condizioni iniziali date:

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = -X_2(s) + 9U(s) \\ Y(s) = X_1(s) + X_2(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) + \dfrac{1}{s+1} \\ X_2(s) = \dfrac{9}{s+1}U(s) + \dfrac{2}{s+1} \\ Y(s) = \dfrac{10}{s+1}U(s) + \dfrac{3}{s+1} \end{cases}$$

in cui

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \underbrace{\frac{10}{s+1}U(s)}_{M.F.} + \underbrace{\frac{3}{s+1}}_{M.L.} \\
&= \frac{10}{(s+1)(s+3)} + \frac{3}{s+1} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)(s+3)} + \frac{3}{s+1}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)(s+3)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right](t) \\
&= 5e^{-t} - 5e^{-3t} + 3e^{-t} = 8e^{-t} - 5e^{-3t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

5 Poli multipli

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_1(t) - 3x_3(t) - u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Valutare la stabilità del sistema.
3. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema.
4. Determinare l'espressione analitica $y(t)$ della risposta a $u(t) = \text{sca}(t)$, $t \geq 0$.

Soluzione

1. Si può calcolare la F.d.T. utilizzando la trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} sX_1(s) = -X_3(s) \\ sX_2(s) = X_1(s) - X_2(s) \\ sX_3(s) = 2X_1(s) - 3X_3(s) - U(s) \\ Y(s) = X_2(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_1(s) = -X_3(s) \\ sX_2(s) = X_1(s) - X_2(s) \\ (s+3)\,X_3(s) = 2X_1(s) - U(s) \\ Y(s) = X_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX_1(s) = -X_3(s) \\ sX_2(s) = X_1(s) - X_2(s) \\ X_3(s) = \dfrac{2}{s+3}X_1(s) - \dfrac{1}{s+3}U(s) \\ Y(s) = X_2(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_1(s) = -\dfrac{2}{s+3}X_1(s) + \dfrac{1}{s+3}U(s) \\ sX_2(s) = X_1(s) - X_2(s) \\ X_3(s) = \dfrac{2}{s+3}X_1(s) - \dfrac{1}{s+3}U(s) \\ Y(s) = X_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(s + \dfrac{2}{s+3}\right) X_1(s) = \dfrac{1}{s+3}U(s) \\ sX_2(s) = X_1(s) - X_2(s) \\ X_3(s) = \dfrac{2}{s+3}X_1(s) - \dfrac{1}{s+3}U(s) \\ Y(s) = X_2(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2}U(s) \\ sX_2(s) = X_1(s) - X_2(s) \\ X_3(s) = \dfrac{2}{s+3}X_1(s) - \dfrac{1}{s+3}U(s) \\ Y(s) = X_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}U(s) \\ (s+1)X_2(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}U(s) \\ X_3(s) = \dfrac{2}{s+3} \cdot \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}U(s) - \dfrac{1}{s+3}U(s) \\ Y(s) = X_2(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}U(s) \\ X_2(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2(s+2)}U(s) \\ X_3(s) = -\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}U(s) \\ Y(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2(s+2)}U(s) \end{cases}$$

Quindi la funzione di trasferimento del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ è:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} := G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

Alternativamente, si poteva applicare la definizione di funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} G(s) &= C\,(sI - A)^{-1}\,B + D \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ -1 & s+1 & 0 \\ -2 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \alpha_{23} \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in cui:

$$\begin{aligned} &\det(sI - A) = s(s+1)(s+3) - (-2(s+1)) = (s+1)(s^2+3s+2) = (s+1)^2(s+2) \\ &\alpha_{23} = \Delta_{32} = (-1)^{2+3}1 = -1 \end{aligned}$$

per cui la F.d.T. è:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}.$$

2. I poli del sistema sono $s_1 = -1$ con molteplicità $n_1 = 2$ e $s_2 = -2$ con molteplicità $n_2 = 1$. Dato che il sistema di partenza è di ordine 3 e ci sono 3 poli nella funzione di trasferimento, non ci sono autovalori nascosti e i poli sono tutti e soli gli autovalori di A. Si può concludere per il criterio degli autovalori che il sistema è asintoticamente stabile.

3. Per valutare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema, utilizziamo il teorema del valore iniziale (TVI) e il teorema del valore finale (TVF), sulla trasformata di Laplace dell'uscita del sistema:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)}$$

- Calcoliamo $y(0)$ con il TVI:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = 0.$$

- Calcoliamo $\dot{y}(0)$ con il TVI:

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,(sY(s) - y(0)) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)} = 0.$$

- Calcoliamo $\ddot{y}(0)$ con il TVI:

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,(s\,(sY(s) - y(0)) - \dot{y}(0)) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{(s+1)^2(s+2)} = 0.$$

- Calcoliamo $\dddot{y}(0)$ con il TVI:

$$\dddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,(s\,(s\,(sY(s) - y(0)) - \dot{y}(0)) - \ddot{y}(0)) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3}{(s+1)^2(s+2)} = 1.$$

- Calcoliamo il valore di regime dell'uscita con il TVF. Le condizioni di applicabilità sono soddisfatte dato che tutti i poli di $Y(s)$ hanno parte reale strettamente negativa (o sono nell'origine). Il valore di regime dell'uscita è quindi:

$$y_\infty := \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{2}.$$

- Le costanti di tempo del sistema sono:

$$\tau_1 = \frac{1}{|\lambda_1|} = 1, \quad \tau_2 = \frac{1}{|\lambda_2|} = \frac{1}{2}$$

  La costante di tempo dominante è quindi τ_1. Dato che ci sono due poli coincidenti con costante di tempo τ_1, il tempo di assestamento sarà circa $T_a \simeq 6.64\tau_1 = 6.64$.

L'andamento della risposta allo scalino del sistema è mostrato in Figura 4.

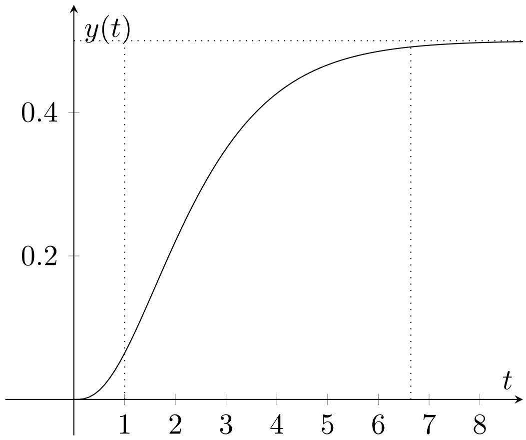

Figura 4: Risposta allo scalino del sistema.

4. Per determinare l'espressione analitica della risposta allo scalino passiamo dal dominio delle trasformate:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)}$$

Per poter antitrasformare, si può scomporre $Y(s)$ in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)} &= \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_4}{s+2} \\ &= \frac{\alpha_1(s+1)^2(s+2) + \alpha_2 s(s+1)(s+2) + \alpha_3 s(s+2) + \alpha_4 s(s+1)^2}{s(s+1)^2(s+2)} \end{aligned}$$

Deve quindi valere per ogni valore di s:

$$1 = \alpha_1(s+1)^2(s+2) + \alpha_2 s(s+1)(s+2) + \alpha_3 s(s+2) + \alpha_4 s(s+1)^2$$

- Valutando in $s = 0$:

$$1 = \alpha_1(1)^2(2), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

- Valutando in $s = -1$:

$$1 = \alpha_3(-1)(-1+2), \quad \alpha_3 = -1$$

- Valutando in $s = -2$:

$$1 = \alpha_4(-2)(-2+1)^2, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2}$$

- Per ottenere il valore del parametro α_2 (associato all'autovalore con $s_1 = -1$), si può sfruttare il valore dei parametri trovati, e valutare l'uguaglianza in un altro punto. Quindi l'uguaglianza diventa:

$$1 = \frac{1}{2}(s+1)^2(s+2) + \alpha_2 s(s+1)(s+2) - s(s+2) - \frac{1}{2}s(s+1)^2$$

che, valutata in $s = -3$ da:

$$\begin{aligned}
&1 = \frac{1}{2}(-3+1)^2(-3+2) + \alpha_2(-3)(-3+1)(-3+2) - (-3)(-3+2) - \frac{1}{2}(-3)(-3+1)^2 \\
&1 = \frac{1}{2}(-2)^2(-1) + \alpha_2(-3)(-2)(-1) - (-3)(-1) - \frac{1}{2}(-3)(-2)^2 \\
&1 = -2 - 6\alpha_2 - 3 + 6 \\
&\alpha_2 = 0
\end{aligned}$$

La risposta del sistema è quindi data da:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_4}{s+2}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{s+1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_3}{(s+1)^2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_4}{s+2}\right](t) \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 t e^{-t} + \alpha_3 e^{-2t}, \quad t \geq 0 \\
&= \frac{1}{2} - te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

6 Sistema a fase non minima

Si consideri il sistema lineare di ordine 3 avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s-1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

1. Si verifichino le proprietà di stabilità del sistema (si può, a questo scopo, utilizzare il criterio di Routh Hurwitz).

2. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.

Soluzione

1. Si nota inizialmente che, se il sistema è di ordine 3 (presenta 3 autovalori) e la funzione di trasferimento $G(s)$ presenta 3 poli (il denominatore è un polinomio di grado 3), questi ultimi coincidono con gli autovalori del sistema.

   La tabella di Routh-Hurwitz risulta essere la seguente:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 11 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ h_1 & h_2 & \\ k_1 & & \end{array}$$

   dove i parametri sono:

$$h_1 = -\frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}(6 - 66) = 10,$$
$$h_2 = -\frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

   Mentre:

$$k_1 = -\frac{1}{h_1} \det \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{h_1}(-6h_1) = 6.$$

   Dato che la prima colonna della tabella di Routh-Hurwitz ha tutti elementi concordi, il sistema è asintoticamente stabile.

2. La trasformata di Laplace di $y(t)$ si calcola come

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

   dove

$$U(s) = \mathcal{L}\left[u(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[\text{sca}(t)\right](s) = \frac{1}{s}$$

   quindi:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)} = \frac{s-1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

   Per tracciare la risposta allo scalino del sistema si utilizzano il teorema del valore iniziale (TVI) e il teorema del valore finale (TVF):

(a) Calcoliamo $y(0)$ con il TVI:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0.$$

(b) Calcoliamo $\dot{y}(0)$ con il TVI:

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 1.$$

(c) Calcoliamo il valore di regime con il TVF:

$$y_\infty := \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{6}.$$

(d) La costante di tempo dominante è:

$$\tau_d = \frac{1}{\min_i |\lambda_i|} = 1$$

per cui il tempo di assestamento del sistema è $T_a \simeq 5\tau_d = 5$.

La risposta allo scalino del sistema è mostrata in Figura 5.

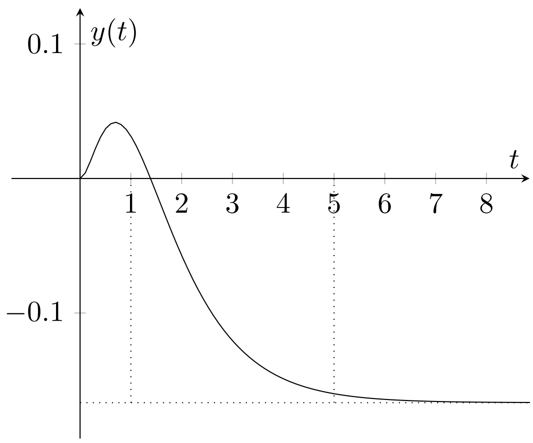

Figura 5: Risposta allo scalino.