Esercitazione 06: Sistemi interconnessi e funzioni di trasferimento

20 aprile 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Schema a blocchi

Con riferimento al seguente schema a blocchi mostrato in Figura 1

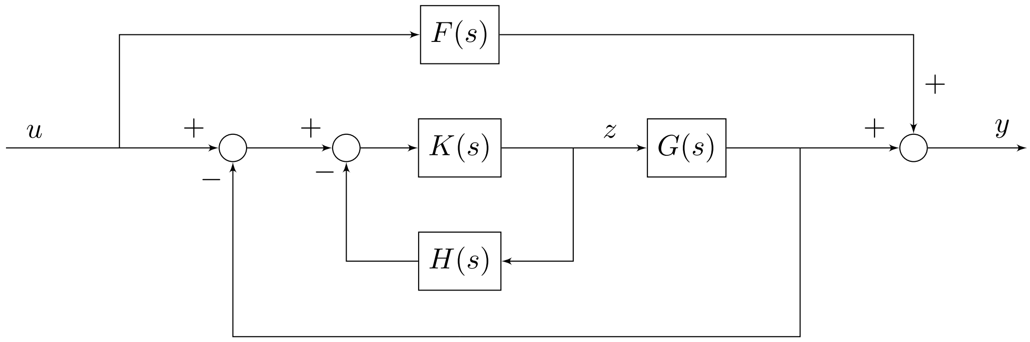

Figura 1: Schema a blocchi di riferimento.

1. Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e la variabile $z(t)$.
2. Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
3. Si dica se è necessario che uno dei sistemi $G(s)$, $H(s)$, $K(s)$, $F(s)$ sia asintoticamente stabile per l'asintotica stabilità del sistema complessivo.

Soluzione

1. Si può notare che il ramo che include $F(s)$ non contribuisce al segnale $z(t)$, per cui può essere eliminato. Si può quindi riscrivere il sistema come mostrato in Figura 2.

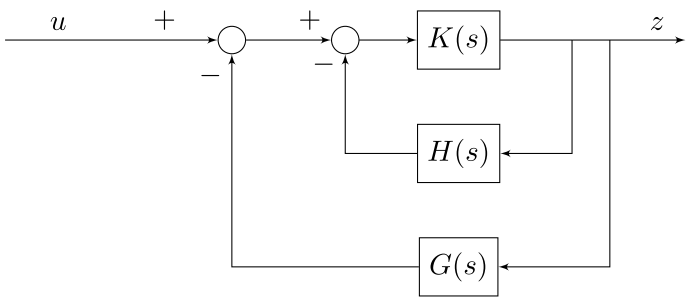

Figura 2: Schema rielaborato.

Partendo dall'anello più interno, è possibile definire la funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)H(s)},$$

e il sistema può essere riscritto come mostrato in Figura 3.

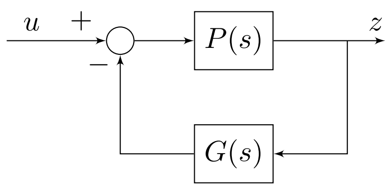

Figura 3: Schema rielaborato.

Per cui si può calcolare la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $z(t)$ come:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)G(s)} \\ &= \frac{K(s)}{1+K(s)\left(H(s)+G(s)\right)} \end{aligned}$$

2. Il sistema può essere riscritto come in Figura 4.

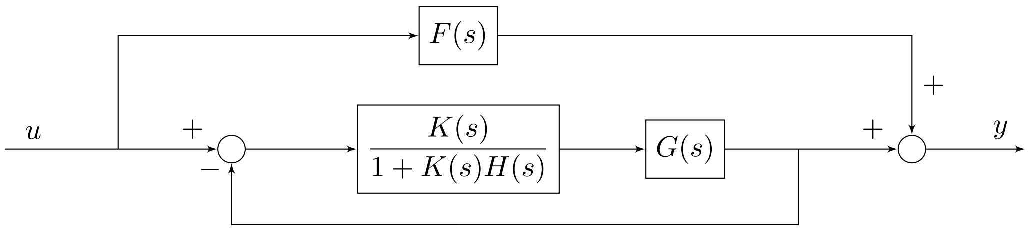

Figura 4: Schema rielaborato.

Successivamente si può riscrivere il sistema come in Figura 5.

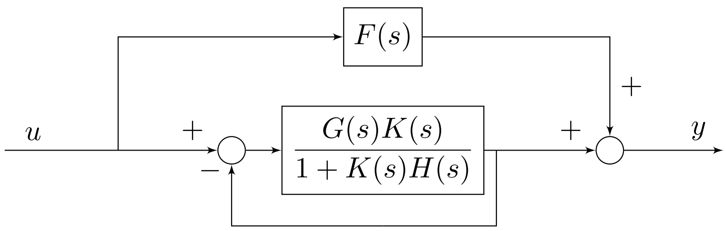

Figura 5: Schema rielaborato.

Chiamando con $L(s) = \dfrac{G(s)K(s)}{1+K(s)H(s)}$, si può riscrivere il sistema come in Figura 6.

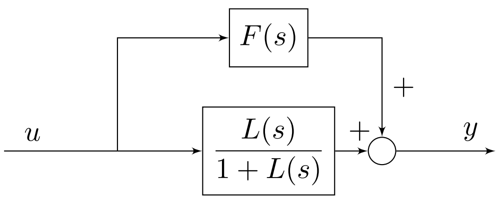

Figura 6: Schema rielaborato.

Quindi si può ricavare:

$$\begin{aligned} G_{\text{tot}} := \frac{Y(s)}{U(s)} &= F(s) + \frac{L(s)}{1+L(s)} \\ &= \frac{F(s)+G(s)K(s)+F(s)K(s)\left(H(s)+G(s)\right)}{1+K(s)\left(H(s)+G(s)\right)} \end{aligned}$$

3. $F(s)$ è in parallelo a tutto il resto: è quindi necessario che sia asintoticamente stabile.

2 Schemi a blocchi

Si calcoli la funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ del il sistema interconnesso rappresentato in Figura 7, composto da tre sistemi lineari con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$.

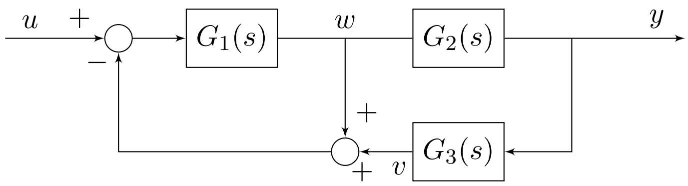

Figura 7: Sistema interconnesso.

Soluzione

Chiamando con $e(t)$ l'ingresso di $G_1(s)$, con $w(t)$ la sua uscita e con $v(t)$ l'uscita di $G_3(s)$ si può notare che

$$e(t) = u(t) - (w(t) + v(t)) = (u(t) - v(t)) - w(t).$$

Lo schema a blocchi è, quindi, equivalente allo schema rappresentato in Figura 8.

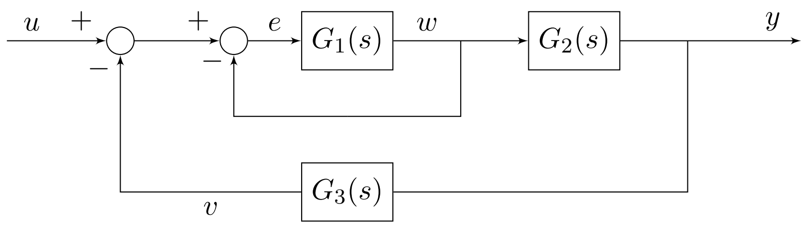

Figura 8: Schema equivalente.

Notando che $G_1(s)$ è retroazionato con retroazione negativa unitaria, si può riscrivere il sistema come mostrato in Figura 9.

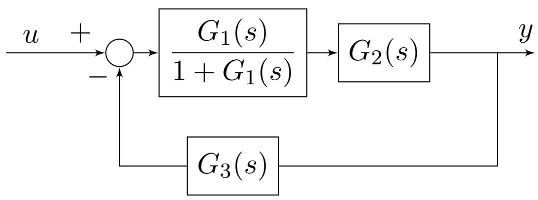

Figura 9: Schema semplificato.

È quindi ora semplice ottenere la funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ come:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)}}{1 + \dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)} \cdot G_3(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + (1 + G_2(s)G_3(s))\, G_1(s)}$$

Una soluzione alternativa consiste nello scrivere le relazioni ingresso-uscita in termini di trasformata di Laplace dei vari sistemi ed esprimere la trasformata di Laplace di $y(t)$ in funzione di $u(t)$.

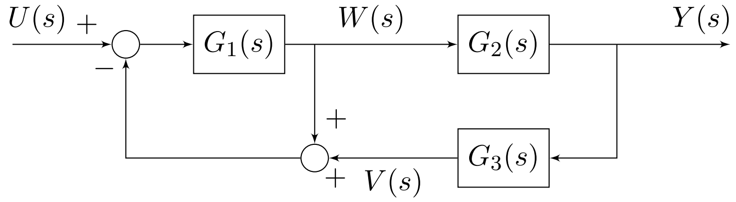

Figura 10: Analisi dei segnali nel sistema interconnesso.

Analizzando lo schema rappresentato in Figura 10, è possibile scrivere le equazioni algebriche seguenti:

$$\begin{cases} W(s) = G_1(s)\left(U(s) - W(s) - V(s)\right) \\ Y(s) = G_2(s)W(s) \\ V(s) = G_3(s)Y(s) \end{cases}$$

$$(1 + G_1(s))W(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)V(s)$$

$$W(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}U(s) - \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}G_3(s)Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)}U(s) - \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)}Y(s)$$

$$(1 + G_1(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s))Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s),$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)\left(1 + G_2(s)G_3(s)\right)}$$

confermando il risultato precedentemente ottenuto.

3 Schema a blocchi

Dato lo schema a blocchi mostrato in Figura 11

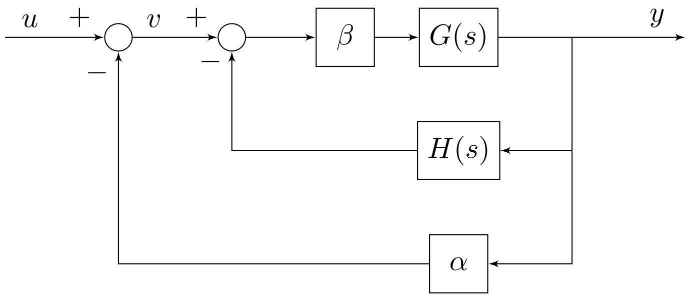

Figura 11: Schema a blocchi di riferimento.

con

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = \frac{s}{s+2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

1. Calcolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
2. Si calcolino guadagno generalizzato, tipo, poli, zeri della funzione di trasferimento ottenuta al punto precedente.
3. Studiare la stabilità del sistema cui corrisponde la funzione di trasferimento trovata al punto precedente.
4. Posti $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, tracciare l'andamento qualitativo della risposta all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.

Soluzione

1. Lo schema a blocchi può essere riscritto come mostrato in Figura 12

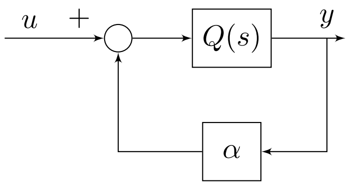

Figura 12: Schema rielaborato.

con

$$Q(s) = \frac{\beta G(s)}{1 + \beta G(s) H(s)}$$

da cui si può ricavare:

$$F(s) = \frac{Q(s)}{1 + \alpha Q(s)} = \frac{\dfrac{\beta G(s)}{1 + \beta G(s)H(s)}}{1 + \dfrac{\alpha \beta G(s)}{1 + \beta G(s) H(s)}} = \frac{\beta G(s)}{1 + \beta G(s) H(s) + \alpha \beta G(s)}$$

Sostituendo le espressioni di $G(s)$ e di $H(s)$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{\dfrac{\beta}{s+1}}{1+\beta\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}+\dfrac{\alpha\beta}{s+1}} = \frac{\beta(s+2)}{(s+1)(s+2)+\beta s+\alpha\beta(s+2)} \\
&= \frac{\beta(s+2)}{s^2+(3+\beta+\alpha\beta)s+2+2\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

2. La F.d.T. $F(s)$ ha le seguenti caratteristiche:

   - Il tipo della funzione di trasferimento è $g = 0$ in quanto non ci sono singolarità nell'origine.
   - Il guadagno statico si può quindi ottenere come:

   $$F(0) = \frac{2\beta}{2+2\alpha\beta} = \frac{\beta}{1+\alpha\beta}$$

     e in questo caso coincide con il guadagno generalizzato μ (dato che $g = 0$).
   - I poli del sistema sono:

   $$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-(3+\beta+\alpha\beta) \pm \sqrt{(3+\beta+\alpha\beta)^2-4(2+2\alpha\beta)}\right)$$

   - $F(s)$ ha un solo zero in $s = -2$.

3. Per studiare la stabilità del sistema associato a $F(s)$, dovremmo applicare il criterio di Routh al polinomio:

   $$p(s) = s^2 + (3+\beta+\alpha\beta)s + 2 + 2\alpha\beta$$

   perché è il denominatore di $F(s)$. Dato, però, che il $p(s)$ è del secondo ordine, sappiamo che la condizione necessaria affinché tutte le sue radici abbiano parte reale strettamente minore di 0 (cioè che tutti i coefficienti del polinomio abbiano lo stesso segno) è anche sufficiente. Quindi si deve risolvere il seguente sistema:

   $$\begin{cases} 1 > 0 \\ 3+\beta+\alpha\beta > 0 \\ 2+2\alpha\beta > 0 \end{cases} .$$

   Poiché $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, essi sono sempre tutti positivi, pertanto il sistema è sempre asintoticamente stabile.

4. Ponendo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, la F.d.T. del sistema diventa:

   $$F(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+(3+2+2)s+2+4} = \frac{2(s+2)}{s^2+6s+6} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+6)}.$$

   Per tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema si scrive l'espressione dell'uscita in trasformata di Laplace:

   $$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+1)(s+6)}$$

   Si utilizzano quindi il teorema del valore iniziale (TVI) e il teorema del valore finale (TVF):

   - Utilizzo il TVI per calcolare $y(0)$:

   $$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+6)} = 0$$

- Utilizzo il TVI per calcolare $\dot{y}(0)$:

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(sY(s) - y(0)\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s(s+2)}{(s+1)(s+6)} = 2$$

- Le ipotesi di applicabilità del TVF sono verificate, per cui utilizzo il TVF per calcolare y_∞:

$$y_\infty := \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+6)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

- La risposta allo scalino non oscilla dato che sono presenti solo poli reali.
- La costante di tempo dominante del sistema è data da:

$$\tau_d = \max_i \tau_i = \frac{1}{\min_i |\lambda_i|} = 1$$

  per cui il tempo di assestamento è di circa $T_a \simeq 5\tau_d = 5$ unità di tempo.

La risposta allo scalino è mostrata in Figura 13.

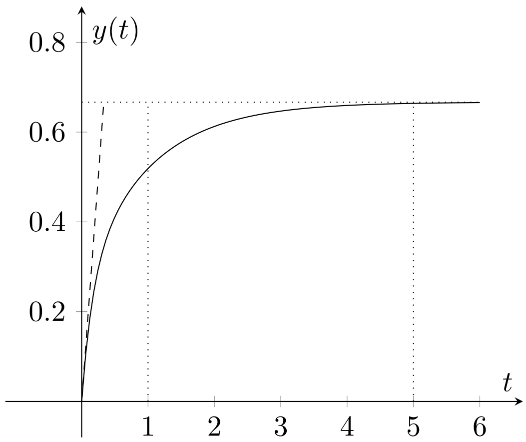

Figura 13: Risposta allo scalino del sistema.

4 Schema a blocchi

Si consideri il sistema dinamico con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = w(t) + 2x(t) \\ \dot{z}(t) = 4y(t) \\ \dot{y}(t) = -4y(t) + 5\left(w(t) - z(t)\right) \\ x(t) = u(t) + 10y(t) \end{cases}$$

1. Si disegni lo schema a blocchi corrispondente.
2. Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
3. Come si sarebbe potuta calcolare tale funzione di trasferimento in modo alternativo?
4. Il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

Soluzione

1. I blocchi corrispondenti ai sottosistemi sono mostrati in Figura 14.

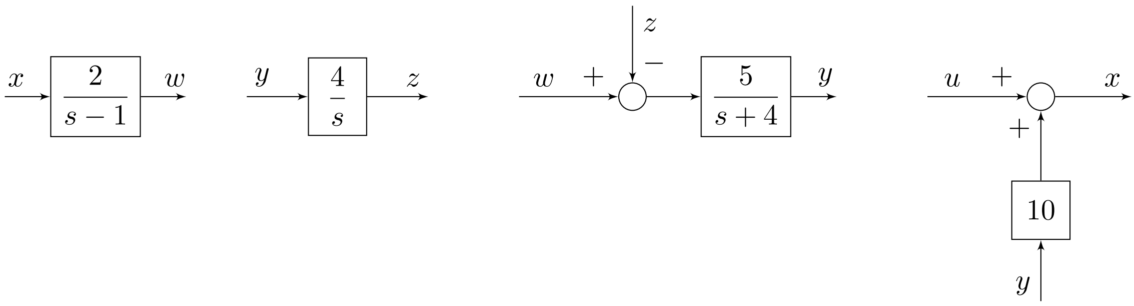

Figura 14: Blocchi corrispondenti ai sottosistemi.

Componendo i singoli blocchi, si ottiene uno schema complessivo come mostrato in Figura 15.

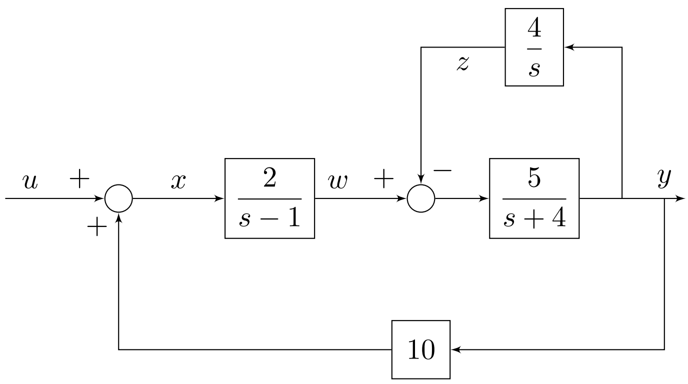

Figura 15: Blocchi corrispondenti ai sottosistemi.

2. Per il calcolo della funzione di trasferimento complessiva, si può rielaborare lo schema a blocchi. Per esempio, si può notare che il sistema può essere riscritto come mostrato in Figura 16, in cui:

$$H(s) = \frac{\dfrac{5}{s+4}}{1 + \dfrac{20}{s(s+4)}} = \frac{5s}{s^2 + 4s + 20}$$

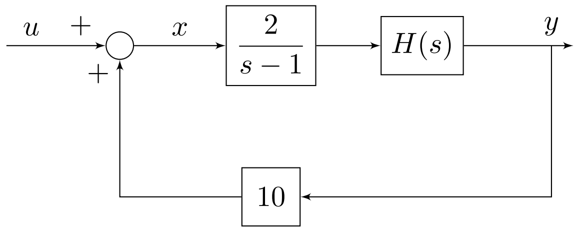

Figura 16: Blocchi corrispondenti ai sottosistemi.

A questo punto, è facile vedere che la funzione di trasferimento complessiva è:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\frac{2}{s-1}H(s)}{1-\frac{20}{s-1}H(s)} \\
&= \frac{\frac{2}{s-1}H(s)}{1-\frac{20}{s-1}H(s)} \\
&= \frac{2H(s)}{s-1-20H(s)} \\
&= \frac{2\frac{5s}{s^2+4s+20}}{s-1-20\frac{5s}{s^2+4s+20}} \\
&= \frac{10s}{(s-1)(s^2+4s+20)-100s} \\
&= \frac{10s}{s^3+3s^2-84s-20}
\end{aligned}$$

3. La F.d.T. si poteva calcolare riscrivendo il sistema nello spazio di stato come:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Bu(t)$$

$$y(t) = C \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Du(t)$$

in cui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

da cui si calcola la F.d.T. con la definizione:

$$\begin{aligned}
G(s) &= C(sI-A)^{-1}B + D \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 & -20 \\ 0 & s & -4 \\ -5 & 5 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(sI-A)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \alpha_{31} & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

in cui:

$$\begin{aligned}
\det(sI - A) &= s(s-1)(s+4) - (100s - 20(s-1)) \\
&= s^3 + 3s^2 - 4s - 80s - 20 = s^3 + 3s^2 - 84s - 20 \\
\alpha_{31} &= \Delta_{13} = (-1)^{1+3} 5s = 5s
\end{aligned}$$

per cui

$$G(s) \frac{10s}{s^3 + 3s^2 - 84s - 20}.$$

4. No, perché è violata la condizione necessaria sulla concordia dei segni dei coefficienti del polinomio caratteristico.

5 Schema a blocchi

Si consideri lo schema a blocchi rappresentato in Figura 17.

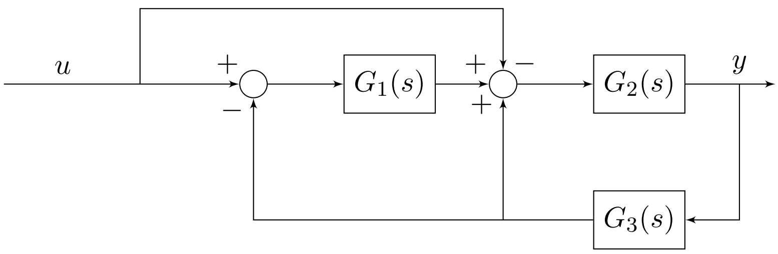

Figura 17: Schema a blocchi.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento (F.d.T.) complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
2. Si ponga:

$$G_1(s) = \frac{4(1+5s)}{1+4s}, \quad G_2(s) = \frac{2}{s}, \quad G_3(s) = k$$

   Per quali valori di k il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

3. Si ponga $k = 100$. Qual è il valore di regime per l'uscita a fronte di un ingresso costante $u(t) = 200$?

Soluzione

1. Lo schema di Figura 17 è equivalente allo schema rappresentato in Figura 18.

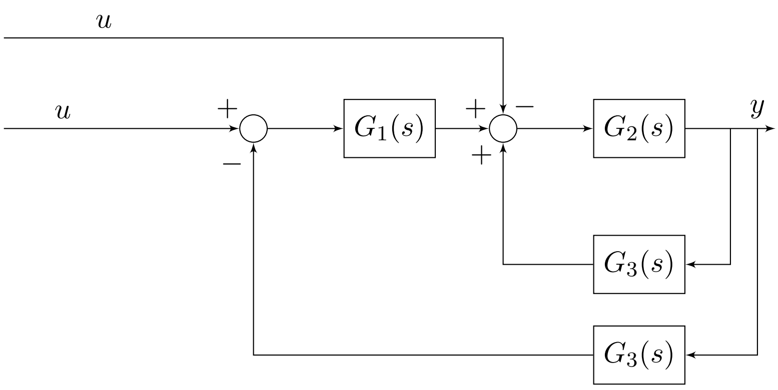

Figura 18: Schema a blocchi riscritto.

A sua volta, lo schema di Figura 18 può essere semplificato come mostrato in Figura 19.

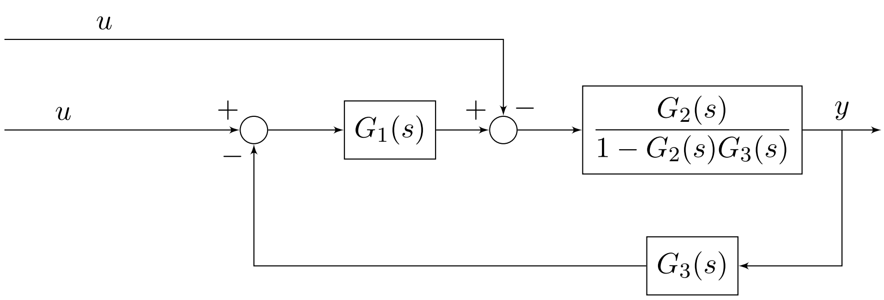

Figura 19: Schema a blocchi riscritto.

Considerando il principio di sovrapposizione degli effetti, considero l'effetto dei due ingressi (uguali e pari a $u(t)$) separatamente, ottenendo che la F.d.T. cercata può essere calcolata come il parallelo delle due seguenti:

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{-G_2(s)}{1+G_2(s)G_3(s)\left(G_1(s)-1\right)}\\ F_2(s) &= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)G_3(s)\left(G_1(s)-1\right)}\end{aligned}$$

da cui risulta che la F.d.T. corrispondente è:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{G_2(s)\left(G_1(s)-1\right)}{1+G_2(s)G_3(s)\left(G_1(s)-1\right)}.$$

2. La F.d.T. complessiva diventa:

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{\frac{2}{s}\left(\frac{4(1+5s)}{1+4s}-1\right)}{1+\frac{2k}{s}\left(\frac{4(1+5s)}{1+4s}-1\right)}\\ &= \frac{2\left(3+16s\right)}{s(1+4s)+2k(3+16s)}\\ &= \frac{2(16s+3)}{4s^2+(32k+1)s+6k}\end{aligned}$$

Dato che il sistema è ottenuto componendo tre sistemi senza parti nascoste, l'ordine del sistema complessivo è dato dalla somma degli ordini dei singoli sottosistemi. Per cui il sistema complessivo ha ordine $1+1+0=2$. Dato che l'ordine del sistema è pari al grado del denominatore della F.d.T. ottenuta, le radici del denominatore di $F(s)$ sono tutti e soli gli autovalori del sistema. Dato che il polinomio è di grado 2, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che tutti i coefficienti siano concordi in segno. Si può quindi imporre che:

$$\begin{cases}32k+1>0\\ 6k>0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad k>0$$

3. Per $k=100$ la F.d.T. del sistema complessivo è:

$$F(s) = \frac{2(16s+3)}{4s^2+3201s+600}$$

L'uscita del sistema nel dominio di Laplace si può quindi scrivere come:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{2(16s+3)}{4s^2+3201s+600}\cdot\frac{200}{s}$$

Per calcolare il valore di regime dell'uscita $y(t)$ si può applicare il teorema del valore finale:

$$y_\infty := \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0}\frac{400s(16s+3)}{s(4s^2+3201s+600)} = \lim_{s\to 0}\frac{400(16s+3)}{4s^2+3201s+600} = \frac{400\cdot 3}{600} = 2.$$

6 Schema a blocchi

Si considerino i sistemi dinamici:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) - 4z(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 : \dot{z}(t) = -z(t) + 2u(t) + 5w(t)$$

1. Dire se i sistemi dati, presi singolarmente, sono asintoticamente stabili.
2. Considerando che:
   - per il sistema $\mathcal{S}_1$ gli ingressi sono $u(t)$ e $z(t)$ e l'uscita è $w(t)$,
   - per il sistema $\mathcal{S}_2$ gli ingressi sono $u(t)$ e $w(t)$ e l'uscita è $z(t)$,

   si disegni lo schema a blocchi complessivo che mostri le interconnessioni tra i sottosistemi dati, e che abbia come ingresso $u(t)$ e uscita $z(t)$.
3. Si calcoli la funzione di trasferimento (F.d.T.) complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $z(t)$.
4. Si tracci la risposta alo scalino del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $z(t)$.

Soluzione

1. Il polinomio caratteristico di $\mathcal{S}_1$ è:

   $$p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 1) + 8 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

   i coefficienti sono concordi, condizione necessarie e sufficiente per l'asintotica stabilità di $\mathcal{S}_1$, preso singolarmente.

   $\mathcal{S}_2$, preso singolarmente, è anche esso asintoticamente stabile dato che ha un solo autovalore pari a -1.
2. Lo schema a blocchi corrispondente al sistema dato è quello mostrato in Figura 20.

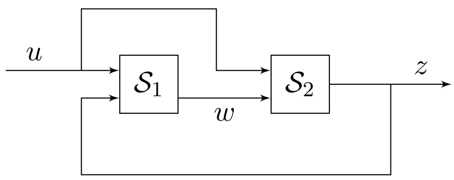

Figura 20: Schema a blocchi risultante.

3. Le funzioni di trasferimento che legano, per i sottosistemi isolati, le variabili di ingresso alle variabili di uscita sono le seguenti:
   - Per il sottosistema $\mathcal{S}_1$ avente come ingressi $u(t)$ e $z(t)$ e come uscita $w(t)$:

     $$G_{wu}(s) = \frac{s-3}{s^2 + 2s + 5}, \quad G_{wz}(s) = -4.$$

   - Per il sottosistema $\mathcal{S}_2$ avente come ingressi $u(t)$ e $w(t)$ e come uscita $z(t)$:

     $$G_{zu}(s) = \frac{2}{s+1}, \quad G_{zw}(s) = \frac{5}{s+1}.$$

     Lo schema di interconnessioni di Figura 20, può quindi essere rappresentato con lo schema a blocchi in Figura 21.

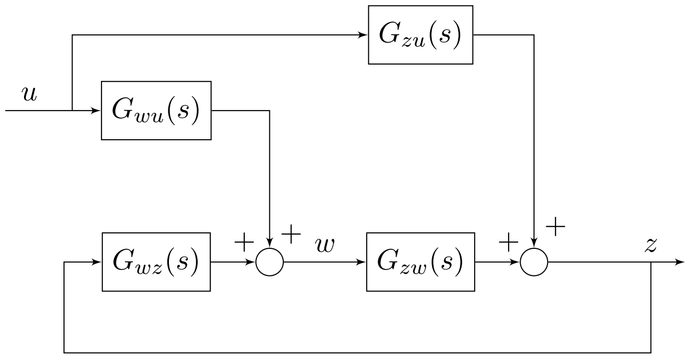

Figura 21: Schema a blocchi risultante.

La F.d.T. complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $z(t)$ è pertanto pari a:

$$G_{\text{tot}}(s) = \frac{G_{zu}(s) + G_{wu}(s)G_{zw}(s)}{1 - G_{zw}(s)G_{wz}(s)} = \frac{2s^2 + 9s - 5}{(s^2 + 2s + 5)(s + 21)}$$

4. Per tracciare la risposta allo scalino del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $z(t)$, si può scrivere che:

$$Z(s) = G_{\text{tot}}(s)U(s) = \frac{2s^2 + 9s - 5}{s(s^2 + 2s + 5)(s + 21)}.$$

Si utilizzano quindi il teorema del valore iniziale (TVI) e il teorema del valore finale (TVF):

- Utilizzo il TVI per calcolare $z(0)$:

$$z(0) = \lim_{s\to\infty} sZ(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^2 + 9s - 5}{(s^2 + 2s + 5)(s + 21)} = 0$$

- Utilizzo il TVI per calcolare $\dot{z}(0)$:

$$\dot{z}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(sZ(s) - z(0)\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(2s^2 + 9s - 5)}{(s^2 + 2s + 5)(s + 21)} = 2$$

- Le ipotesi di applicabilità del TVF sono verificate, per cui utilizzo il TVF per calcolare y_∞:

$$z_\infty := \lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{s\to 0} sZ(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s^2 + 9s - 5}{(s^2 + 2s + 5)(s + 21)} = \frac{-5}{105} = -\frac{1}{21}.$$

- I poli del sistema sono:

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm 2\jmath, \quad s_3 = -21$$

Dato che ci sono poli complessi, saranno presenti delle oscillazioni (smorzate) nella risposta allo scalino del sistema. In particolare, i poli complessi coniugati possono essere scritti come:

$$s_{1,2} = \omega_n \left(-\xi \pm \jmath\sqrt{1 - \xi^2}\right)$$

dove

$$\omega_n = |s_{1,2}| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$$

per cui:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

- Le costanti di tempo sono:

$$\tau_{1,2} = \frac{1}{\omega_n \xi} = \frac{1}{\omega_n \xi} = 1, \quad \tau_3 = \frac{1}{|s_3|} = \frac{1}{21},$$

  per cui la costante di tempo dominante è $\tau_1 = 1$ e il tempo di assestamento è di circa $T_a \simeq 5\tau_1 = 5$ unità di tempo.

La risposta allo scalino è mostrata in Figura 22.

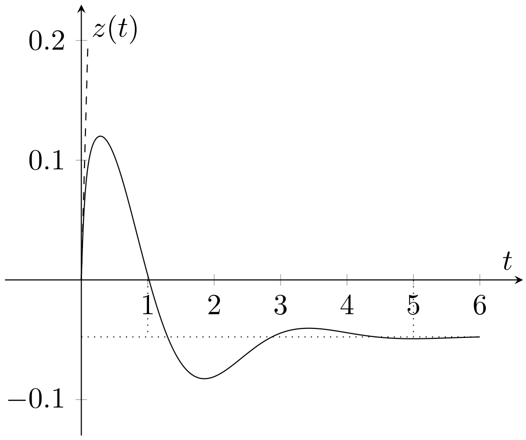

Figura 22: Risposta allo scalino del sistema.

Osservazione 1. *Notare che*

$$\omega_n \xi = |\Re\left(s_{1,2}\right)|.$$

È quindi possibile calcolare il tempo di assestamento semplicemente considerando la parte reale degli autovalori complessi coniugati.

Osservazione 2. *Un generico polinomio con autovalori complessi coniugati può essere scritto come:*

$$s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2, \quad \omega_n \geq 0, 0 \leq \xi < 1$$

per cui se si è interessanti al valore $\omega_n \xi$ basta considerare la metà del coefficiente di primo grado del polinomio.

7 Schemi a blocchi

Si consideri il sistema interconnesso mostrato in Figura 23, in cui $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ sono le funzioni di trasferimento di sistemi lineari del primo ordine.

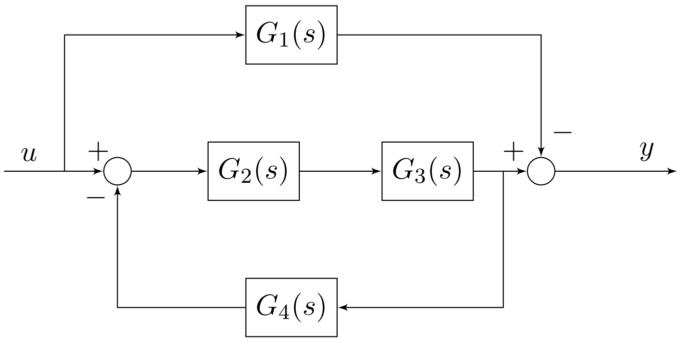

Figura 23: Sistema $\mathcal{S}$ con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Posto
$$G_1(s) = \frac{1}{s+10}, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+2}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s-1}, \quad G_4(s) = -\frac{8}{s+9},$$
calcolare l'espressione di $H(s)$.
3. Valutare le proprietà di stabilià del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, con le funzioni di trasferimento del punto 2.
4. Determinare il guadagno, il tipo, i poli e gli zeri di $H(s)$ calcolata al punto 2.
5. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata di $H(s)$ all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$, indicando nel grafico
   (a) valore iniziale;
   (b) valore asintotico;
   (c) tempo di assestamento.

Soluzione

1. Innanzitutto, si calcolano le funzioni di trasferimento dei blocchi più interni
   - Serie di $G_2(s)$ e $G_3(s)$
   $$G_a(s) = G_2(s)G_3(s)$$
   - Retroazione con "andata" $G_a(s)$ e retroazione $G_4(s)$
   $$G_b(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)G_4(s)}$$
   - Parallelo (a meno del segno) tra $G_b(s)$ e $G_1(s)$
   $$\begin{aligned} H(s) = G_b(s) - G_1(s) &= \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)G_4(s)} - G_1(s) \\ &= \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)} - G_1(s) \qquad (1) \end{aligned}$$

2. Per calcolare $H(s)$ basta sostituire le espressioni delle funzioni di trasferimento date nella formula (1) appena trovata.

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{\frac{s-1}{s+2}\cdot\frac{1}{s-1}}{1+\frac{s-1}{s+2}\cdot\frac{1}{s-1}\cdot\frac{-8}{s+9}} - \frac{1}{s+10} = \frac{\frac{1}{s+2}}{1-\frac{8}{(s+2)(s+9)}} - \frac{1}{s+10} \\
&= \frac{\frac{1}{s+2}}{\frac{(s+2)(s+9)-8}{(s+2)(s+9)}} - \frac{1}{s+10} = \frac{s+9}{s^2+11s+10} - \frac{1}{s+10} \\
&= \frac{s+9}{(s+1)(s+10)} - \frac{1}{s+10} = \frac{s+9-s-1}{(s+1)(s+10)} \\
&= \frac{8}{(s+1)(s+10)} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

3. Il sistema è di ordine 4, quindi esistono due autovalori nascosti. Tali autovalori nascosti derivano:

   (a) dalla serie tra $G_2(s)$ e $G_3(s)$, in cui viene cancellato il polo $p_3 = 1$ e generato un autovalore nascosto $\lambda = p_3 = 1$;

   (b) dal parallelo tra $G_b(s)$ e $-G_1(s)$, in cui viene cancellato il polo $p_4 = -10$, che diventa autovalore nascosto.

   Poiché c'è un autovalore nascosto instabile con parte reale strettamente positiva, si può concludere che il sistema interconnesso è instabile.

4. Riprendendo l'espressione (2) di $H(s)$:

$$H(s) = \frac{8}{(s+1)(s+10)}$$

   (a) Il tipo della funzione di trasferimento indica il numero di poli ($g > 0$) o il numero di zeri ($g < 0$) nell'origine ($s = 0$). Dato che in questo caso non esiste nessuna singolarità nell'origine, il tipo della funzione di trasferimento è $g = 0$;

   (b) Dato che $g = 0$, il guadagno del sistema si può calcolare imponendo $s = 0$, per cui

$$\mu = H(s) = \frac{8}{10};$$

   (c) I poli del sistema sono

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -10;$$

   (d) Nella funzione di trasferimento non compaiono zeri.

5. Per tracciare la risposta forzata allo scalino unitario si passa nel dominio delle trasformate, calcolando:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{8}{(s+1)(s+10)}\cdot\frac{1}{s}$$

   (a) Per calcolare il valore iniziale della risposta forzata, si può notare che il sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ è strettamente proprio e dire immediatamente che $y(0) = 0$. Alternativamente, si applica il teorema del valore iniziale, ottenendo:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{8}{(s+1)(s+10)} = 0$$

(b) Per calcolare il valore asintotico della risposta forzata, si verificano le condizioni di applicabilità del Teorema del Valore Finale (TVF). Dato che le radici del denominatore di $Y(s)$ sono tutte con parte reale strettamente negativa o nell'origine, si può applicare il TVF:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{8}{(s+1)(s+10)} = \frac{8}{10} = \mu$$

(c) $H(s)$ ha due poli in $p_1 = -1$ e $p_2 = -10$, associati, rispettivamente, alle costanti di tempo $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 1/10$. La costante di tempo dominante del sistema è, quindi, τ_1.

La derivata della risposta forzata nell'origine si ottiene applicando il teorema del valore iniziale a $\dot{y}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{y}(0) &= \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\left[\dot{y}(t)\right](s) = \lim_{s\to\infty} s\left(sY(s) - y(0)\right) = \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{8s}{(s+1)(s+10)} = 0\end{aligned}$$

e lo stesso per la derivata seconda $\ddot{y}(t)$

$$\begin{aligned}\ddot{y}(0) &= \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\left[\ddot{y}(t)\right](s) = \lim_{s\to\infty} s^3 Y(s) = \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{8s^2}{(s+1)(s+10)} = 8.\end{aligned}$$

La risposta a scalino è quella mostrata in Figura 24.

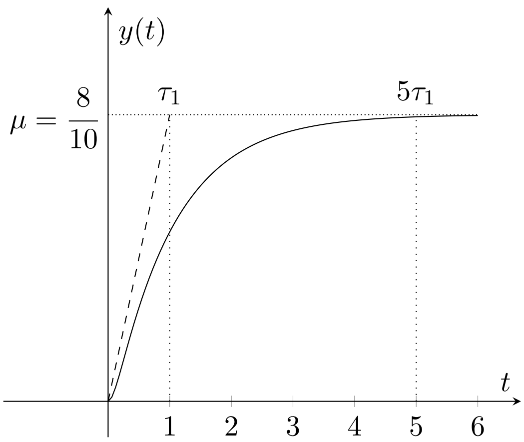

Figura 24: Risposta a scalino di $H(s)$.