

Esercitazione 08: Risposta in frequenza

11 maggio 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Tracciamento diagrammi di Bode

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza del sistema dinamico lineare con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + 0.1s}{1 + 0.01s}.$$

Soluzione

La funzione di trasferimento ha uno zero in $z_1 = -10$, polo in $p_1 = -100$ e un polo nell'origine $p_2 = 0$. Dato che esiste un polo nell'origine, il tipo della funzione di trasferimento è $g = 1$. Il guadagno (generalizzato) μ della funzione di trasferimento è pari a $\mu = [s^g G(s)]|_{s=0} = 10$.

Le pulsazioni di interesse sono quindi 10 pari al modulo dello zero z_1 , e 100, pari al modulo del polo p_1 .

Diagramma di Bode asintotico del modulo Il diagramma di Bode del modulo si costruisce a partire dalle basse pulsazioni e in questo caso inizia con pendenza $-20g = -20\text{dB/decade}$ e assume valore $|\mu|_{\text{dB}} = 20 \log 10 = 20\text{dB}$ in $\omega = 1$. A $\omega = 10$ interviene lo zero z_1 che incrementa di $+20\text{dB/decade}$ la pendenza del diagramma di Bode asintotico del modulo. Il diagramma di Bode del modulo, quindi assume una pendenza di $-20 + 20 = 0\text{dB/decade}$. A $\omega = 100$ inizia a contribuire il polo p_1 che varia di -20dB/decade la pendenza del diagramma di Bode asintotico del modulo. Il diagramma di Bode del modulo, quindi assume una pendenza di $0 - 20 = -20\text{dB/decade}$.

Diagramma di Bode asintotico della fase Il diagramma di Bode della fase assume inizialmente il valore $\angle \mu - 90^\circ g = -90^\circ$. A $\omega = 10$ lo zero z_1 reale negativo contribuisce con una variazione di fase a scalino pari a $+90^\circ$. A $\omega = 100$ il polo p_1 , anch'esso reale e negativo, contribuisce con una variazione di fase a scalino di -90° .

I diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase sono mostrati in Figura 1. In particolare, la linea continua mostra i diagrammi di Bode asintotici, mentre la linea tratteggiata mostra i diagrammi di Bode esatti.

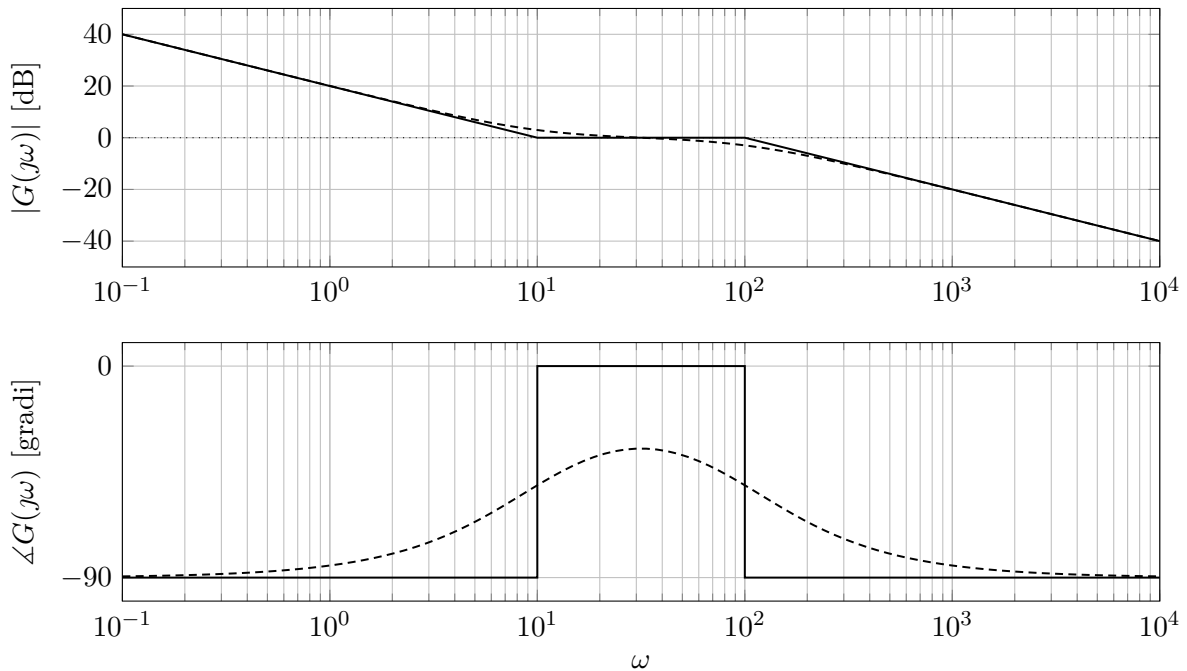


Figura 1: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) di $G(s)$.

2 Tracciamento diagrammi di Bode con poli complessi coniugati

Si consideri un sistema dinamico lineare con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n = 2, \xi = 0.8.$$

Rispondere in maniera chiara e precisa ai seguenti quesiti:

1. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza associata a $G(s)$.
2. Dire che cosa cambia nei diagrammi di Bode asintotici nel caso in cui lo smorzamento sia $\xi = 0.1$.
3. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino unitario del sistema con $\xi = 0.8$ e con $\xi = 0.1$.

Soluzione

1. La funzione di trasferimento $G(s)$ non ha poli o zeri nell'origine, per cui ha tipo $g = 0$. Il guadagno μ di $G(s)$ si può ottenere semplicemente valutando $G(s)$ in 0 dato che non ci sono singolarità nell'origine, ed è pari a $\mu = 1$. $G(s)$ ha due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, che, ai fini del tracciamento dei diagrammi di Bode asintotici, possono essere sostituiti con $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \text{sign}(-\xi\omega_n) \cdot \omega_n$, dove $\text{sign}(\cdot)$ è la funzione segno. Nel caso $\omega_n = 2$ e $\xi = 0.8$, $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = -2$.

Diagramma di Bode asintotico del modulo Il diagramma di Bode asintotico del modulo ha pendenza iniziale (cioè a bassa frequenza) $-20g = 0\text{dB/decade}$, e vale $|\mu|_{\text{dB}} = 0\text{dB}$. In $\omega = 2$ intervengono i due poli a parte reale negativa, per cui c'è una variazione di pendenza pari a $-2 \cdot 20 = -40\text{dB/decade}$.

Diagramma di Bode asintotico della fase Il diagramma di Bode asintotico della fase ha valore iniziale $\angle\mu - 90^\circ g = 0^\circ$. A $\omega = 2$ intervengono i due poli complessi coniugati a parte reale negativa, che contribuiscono alla fase con un decremento a scalino di $-2 \cdot 90^\circ = -180^\circ$.

I diagrammi di Bode asintotici e esatti sono mostrati in Figura 2.

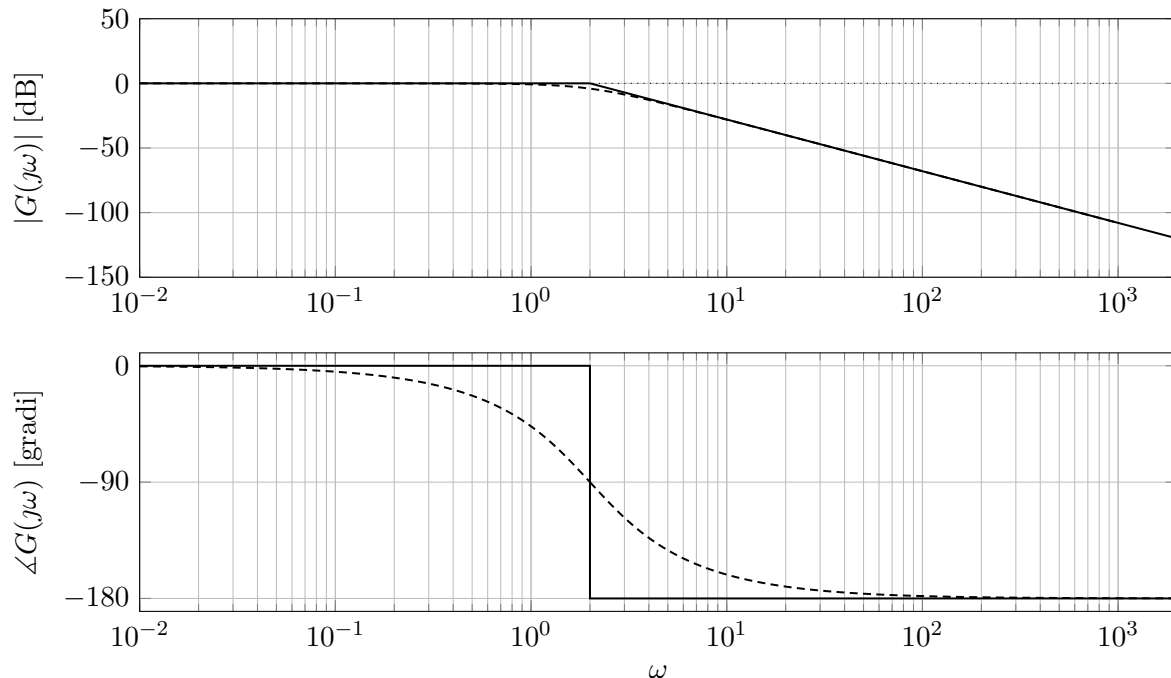


Figura 2: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) e esatti (linea tratteggiata) per $\xi = 0.8$.

2. I diagrammi di Bode asintotici nel caso $\xi = 0.1$ non cambiano rispetto a quelli trovati al punto precedente. Infatti nel tracciamento dei diagrammi di Bode asintotici l'informazione legata a ξ è utilizzata solo per capire se i poli sono a parte reale negativa o positiva. Tuttavia, cambiano i diagrammi di Bode esatti. Infatti, se $|\xi|$ è piccolo (inferiore a $1/\sqrt{2}$) si ha un cosiddetto **picco di risonanza** che aumenta proporzionalmente a $\left|\frac{1}{2\xi}\right|$.

Nel caso in questione, per $\xi = 0.8$ non si ha un picco di risonanza, mentre per $\xi = 0.1$ si ha un picco di risonanza.

Si ha una differenza anche per quanto riguarda il diagramma di Bode esatto della fase. Ciò che accade per $|\xi| \rightarrow 0$ è che il diagramma di Bode della fase esatto tende a schiacciarsi su quello asintotico. Nel caso limite per cui $\xi = 0$, i due diagrammi coincidono.

I diagrammi di Bode asintotici ed esatti di $G(s)$ con $\xi = 0.1$ sono mostrati in Figura 3.

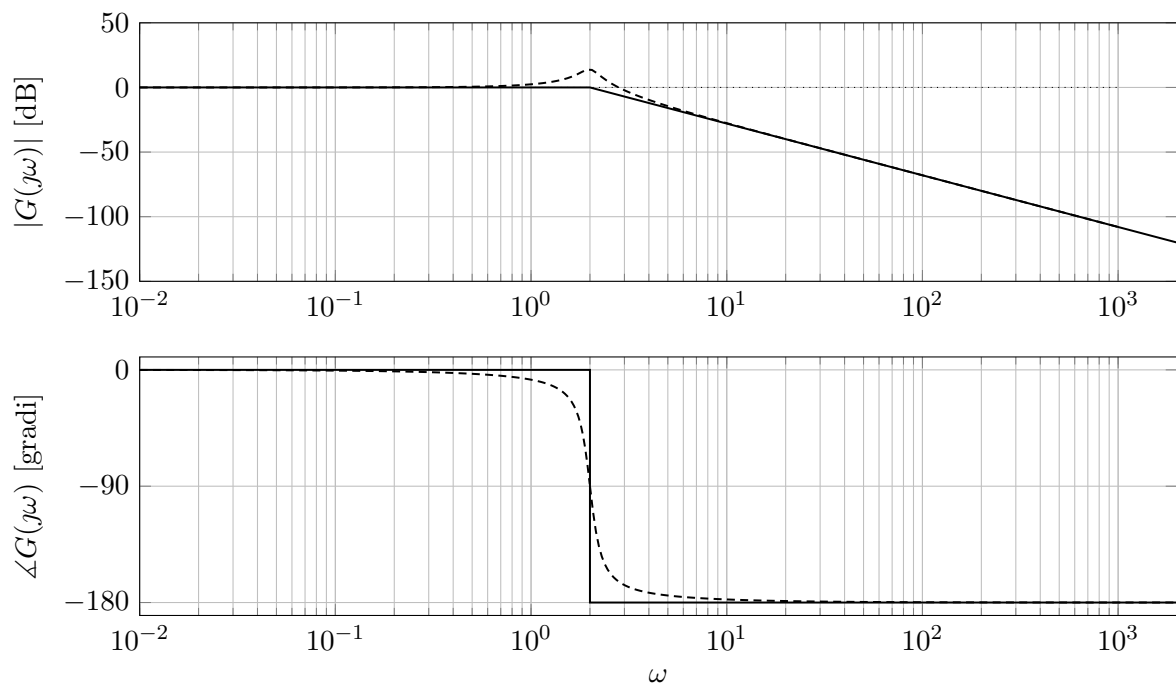


Figura 3: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) per $\xi = 0.1$.

Si può notare il picco di risonanza nel diagramma di Bode (esatto) del modulo che non era presente in Figura 2. Inoltre, confrontando i diagrammi di Bode esatti della fase in Figura 2 e Figura 3, si può notare che al decrescere di $|\xi|$, la fase tende a schiacciarsi verso il diagramma di Bode della fase asintotico.

3. La risposta allo scalino dei due sistemi è mostrata in Figura 4.

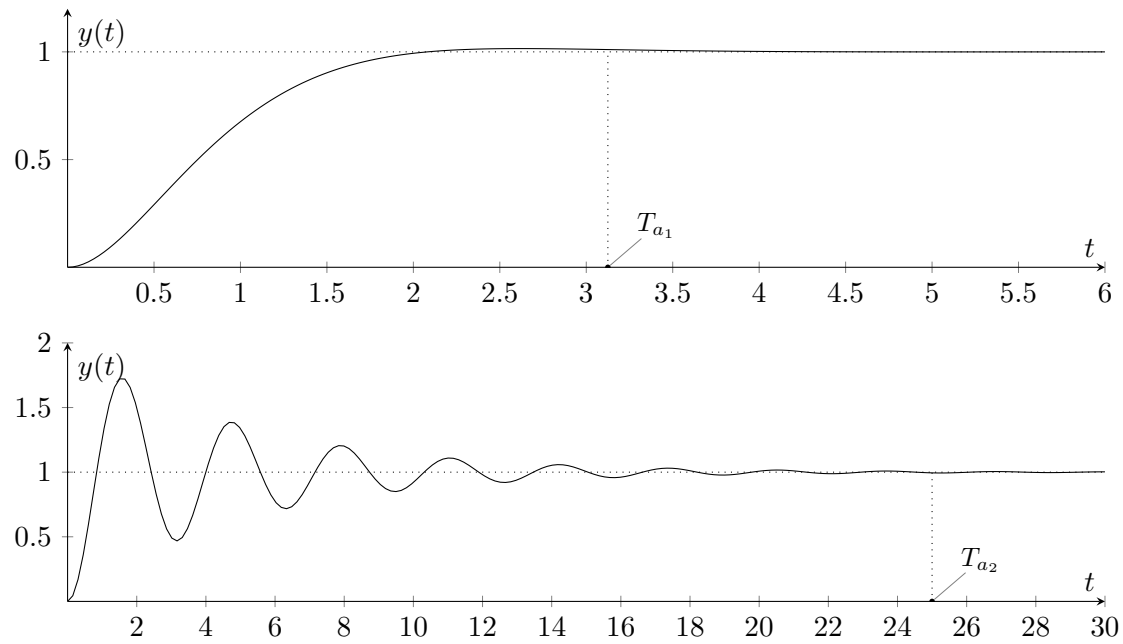


Figura 4: Risposte allo scalino per $\xi = 0.8$ (sopra) e per $\xi = 0.1$ (sotto).

Come è evidente dalla figura per smorzamenti elevati ($\xi_1 = 0.8$) la risposta a scalino è simile a quella di un sistema a due poli reali, senza zeri. In effetti, la stessa osservazione vale anche per i diagrammi di Bode della risposta in frequenza. Per smorzamenti bassi ($\xi_2 = 0.1$) la risposta allo scalino presenta delle oscillazioni.

Il tempo di assestamento, nel caso di poli complessi coniugati, è inversamente proporzionale allo smorzamento ξ e alla pulsazione naturale ω_n secondo la relazione

$$T_a \simeq 5 \frac{1}{\xi \omega_n}$$

da cui si può calcolare che

$$T_{a_1} \simeq 3.125, \quad T_{a_2} \simeq 25.$$

3 Risposta in frequenza

Data la funzione di trasferimento di un sistema lineare del terzo ordine

$$G(s) = 10 \frac{s + 1}{(s + 0.1)(s^2 + 20s + 100)}$$

Rispondere in maniera chiara e precisa ai seguenti quesiti:

1. Valutare le proprietà di stabilità del sistema.
2. Dire qual è il polo dominante del sistema.
3. Determinare la risposta di regime ($y_\infty(t)$) quando

$$u(t) = 2 + \sin(0.01t) + \sin(0.1t) + 2 \cos(100t), \quad t \geq 0$$

e valutare dopo quanto tempo la risposta del sistema si assesta a quella di regime calcolata.

4. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ e verificare che siano consistenti con i risultati ottenuti al punto precedente.
5. Approssimare il sistema con un sistema di ordine ridotto in modo che la risposta allo scalino sia simile (approssimazione di bassa frequenza).

Soluzione

1. Per prima cosa portiamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$\begin{aligned} G(s) &= 10 \frac{s + 1}{(s + 0.1)(s^2 + 20s + 100)} = 10 \frac{s + 1}{(s + 0.1)(s + 10)^2} = \frac{10}{0.1 \cdot 10^2} \cdot \frac{1 + s}{(1 + 10s)(1 + 0.1s)^2} \\ &= \frac{1 + s}{(1 + 10s)(1 + 0.1s)^2}. \end{aligned}$$

Il numero di poli della funzione di trasferimento è uguale all'ordine del sistema, quindi i poli sono tutti e soli gli autovalori del sistema (non ci sono autovalori nascosti). I poli del sistema sono:

- $p_1 = -0.1 < 0$
- $p_2 = p_3 = -10 < 0$.

Essendo tutti autovalori reali negativi, il sistema è asintoticamente stabile.

2. Le costanti di tempo associate ai poli del sistema sono

- $p_1 = -0.1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{|-0.1|} = 10$
- $p_2 = p_3 = -10 \Rightarrow \tau_2 = \tau_3 = \frac{1}{|-10|} = 0.1$

La costante di tempo dominante è $\tau_d = \tau_1$, quindi il polo dominante è $p_d = p_1$.

Il polo dominante di un sistema si può identificare nel piano complesso anche come quello più vicino all'asse immaginario. In particolare, in Figura 5 sono mostrati i poli del sistema (indicati con il simbolo \times) e si può vedere che p_1 è il polo più vicino all'asse immaginario.

3. La risposta del sistema, si assesta al valore di regime calcolato dopo $5\tau_d = 5 \cdot 10 = 50$ unità di tempo.

Osservazione 1. *Ha senso parlare di risposta di regime perché il sistema è asintoticamente stabile. Se il sistema fosse instabile la risposta di regime non esisterebbe.*

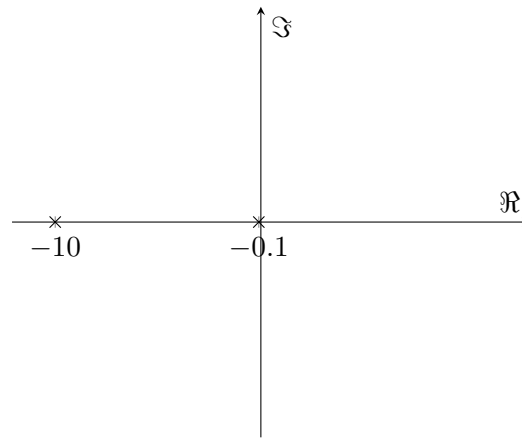


Figura 5: Rappresentazione dei poli nel piano complesso.

Per poter calcolare la risposta di regime si scompone l'ingresso nelle sue quattro componenti:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 2 \\ u_2(t) &= \sin(0.01t) \\ u_3(t) &= \sin(0.1t) \\ u_4(t) &= 2 \cos(100t) \end{aligned}$$

e si sommano le risposte di regime ad esse associate.

- $u_1(t) = 2$ è un ingresso costante. Dato che il sistema è asintoticamente stabile, la risposta di regime è una costante pari all'ingresso moltiplicato per il guadagno del sistema, quindi

$$y_{1,\infty}(t) = 2 \cdot G(0) = 2 \cdot 10 \frac{1}{0.1 \cdot 100} = 2$$

Alternativamente si sarebbe potuto applicare il teorema del valore finale a $Y(s) = G(s) \cdot 2/s$.

- $u_2(t) = \sin(0.01t)$. La risposta di regime è data dal teorema della risposta in frequenza ed è pari a

$$y_{2,\infty}(t) = |G(j0.01)| \cdot \sin(0.01t + \angle G(j0.01))$$

Per valutare $\angle G(j0.01)$ è opportuno scrivere la funzione di trasferimento evidenziando guadagno, tipo, costanti di tempo di poli e zeri, ossia:

$$\begin{aligned} G(s) &= 10 \frac{1+s}{0.1 \left(1 + \frac{s}{0.1}\right) 10^2 \left(1 + \frac{s}{10}\right)^2} \\ &= \frac{1+s}{(1+10s)(1+0.1s)^2} \end{aligned}$$

Si può calcolare

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle \frac{1+j\omega}{(1+10j\omega)(1+0.1j\omega)^2} \\ &= \angle(1+j\omega) - \angle(1+10j\omega) - 2\angle(1+0.1j\omega) \end{aligned}$$

Dato che

$$\begin{aligned} \angle(1+j\omega) &= \arctan \omega \\ \angle(1+10j\omega) &= \arctan(10\omega) \\ \angle(1+0.1j\omega) &= \arctan(0.1\omega) \end{aligned}$$

si può scrivere

$$\angle G(j\omega) = \arctan \omega - \arctan(10\omega) - 2 \arctan(0.1\omega)$$

Osservazione 2. *Notare il fatto che la scrittura che evidenzia guadagno e costanti di tempo consente di utilizzare l'arctan, che è la funzione inversa della tangente tan quando il suo dominio è ristretto a $[-\pi/2, \pi/2]$, (ogni numero complesso di cui si valuta la fase ha parte reale uguale a 1 e quindi la fase è compresa tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, angoli per cui la tan ammette arctan come inversa).*

Quindi, per $u_2(t)$ si ha $\omega = 0.01$ e si può calcolare che

$$\begin{aligned}\angle G(j0.01) &\simeq -0.091\text{rad} \simeq 0\text{rad} \quad (-5.252^\circ) \\ |G(j0.01)| &= \left| \frac{1 + j0.01}{(1 + 10j0.01)(1 + 0.1j0.01)^2} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{1 + 10^{-4}}}{\sqrt{1 + 10^{-2}}(\sqrt{1 + 10^{-6}})^2} = \\ &\simeq 0.995 \simeq 1\end{aligned}$$

da cui si può ricavare ricavare che

$$y_{2,\infty}(t) = \sin(0.01t)$$

- $u_3(t) = \sin(0.1t)$, similmente al caso precedente

$$y_{3,\infty}(t) = |G(j0.1)| \sin(0.1t + \angle G(j0.1)).$$

Il modulo di $G(s)$ valutato in $j0.1$ è

$$\begin{aligned}|G(j0.1)| &= \left| \frac{1 + j0.1}{(1 + 10j0.1)(1 + 0.1j0.1)^2} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{1 + 10^{-2}}}{\sqrt{1 + 1}(\sqrt{1 + 10^{-4}})^2} \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

mentre la fase è

$$\begin{aligned}\angle G(j0.1) &= \arctan 0.1 - \arctan(10 \cdot 0.1) - 2 \arctan(0.1 \cdot 0.1) \\ &\simeq 0 - \frac{\pi}{4} - 2 \cdot 0 = -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

da cui si può ricavare ricavare che

$$y_{3,\infty}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(0.1t - \frac{\pi}{4}\right)$$

- $u_4(t) = 2 \cos(100t)$, quindi $\omega = 100$

$$y_{4,\infty}(t) = 2 \cdot |G(j100)| \cos(100t + \angle G(j100))$$

Il modulo di $G(s)$ valutato in $j100$ è

$$\begin{aligned}|G(j100)| &= \left| \frac{1 + j100}{(1 + 10j100)(1 + 0.1j100)^2} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{1 + 10^4}}{\sqrt{1 + 10^6}(\sqrt{1 + 10^2})^2} \simeq \frac{10^2}{10^3 \cdot 10^2} \\ &= 10^{-3}\end{aligned}$$

mentre la fase è

$$\begin{aligned}\angle G(j100) &= \arctan(100) - \arctan(10 \cdot 100) - 2 \arctan(0.1 \cdot 100) \\ &\simeq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi\end{aligned}$$

da cui si può ricavare che

$$\begin{aligned}y_{4,\infty}(t) &= 2 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(100t - \pi) \\ &= -2 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(100t) \\ &\simeq 0\end{aligned}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, vale che

$$y_{\infty}(t) = y_{1,\infty}(t) + y_{2,\infty}(t) + y_{3,\infty}(t) + y_{4,\infty}(t).$$

Come mostrato in Figura 6 il segnale in ingresso $u(t)$ viene filtrato da $G(s)$ che elimina le componenti di alta frequenza, ma lascia passare (distorcendole di poco) le componenti di bassa frequenza.

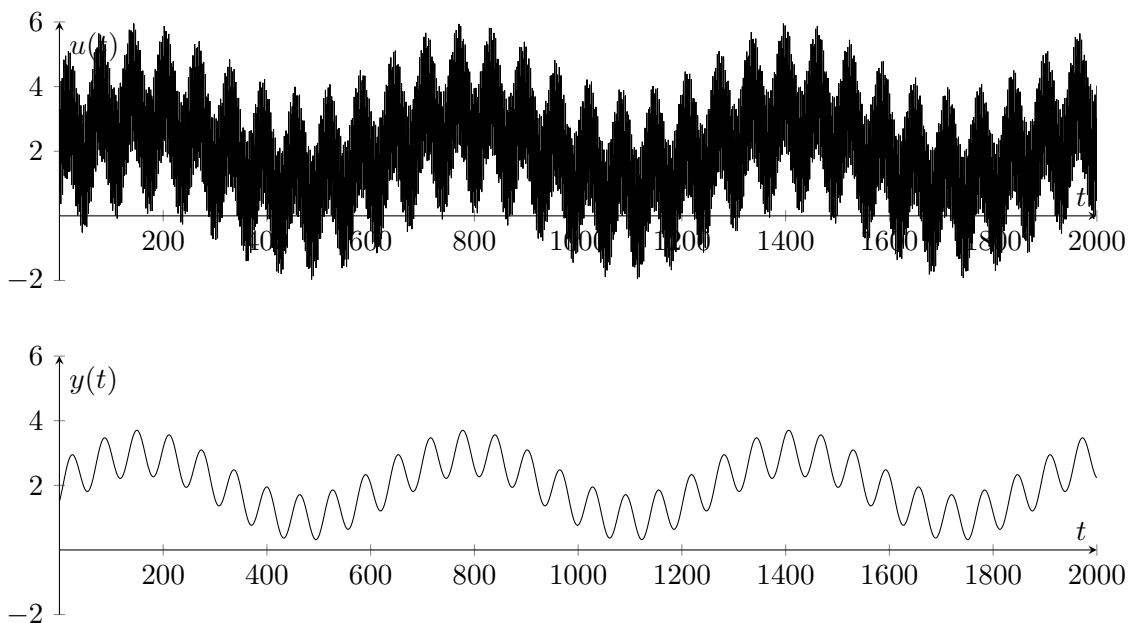


Figura 6: Ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ filtrata da $G(s)$.

4. Per tracciare i diagrammi di Bode asintotici si individuano le pulsazioni corrispondenti ai moduli delle singolarità della funzione di trasferimento:

- Un polo negativo in $p_1 = -0.1$,
- Uno zero negativo in $z_1 = -1$,
- Due poli negativi coincidenti in $p_2 = p_3 = -10$.

Dato che non ci sono singolarità nell'origine, il tipo della funzione di trasferimento è $g = 0$, e il guadagno del sistema si può ottenere come

$$\mu = G(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad |\mu|_{\text{dB}} = 0$$

Diagramma di Bode asintotico del modulo Il tratto iniziale del diagramma di Bode asintotico del modulo ha pendenza $-20g = 0\text{dB/decade}$ e assume il valore $|\mu|_{\text{dB}} = 0\text{dB}$ in $\omega = 1$. In $\omega = 0.1$ interviene il polo p_1 che varia di -20dB/decade la pendenza del diagramma di Bode asintotico del modulo, che quindi assume una pendenza di $0 - 20 = -20\text{dB/decade}$. A $\omega = 1$ interviene lo zero z_1 che varia di $+20\text{dB/decade}$ la pendenza del diagramma di Bode asintotico del modulo, che quindi assume una pendenza di $-20 + 20 = 0\text{dB/decade}$. In $\omega = 10$ intervengono due poli p_2 e p_3 che variano di $-2 \cdot 20 = -40\text{dB/decade}$ la pendenza del diagramma di Bode asintotico del modulo, che quindi assume una pendenza finale di $0 - 40 = -40\text{dB/decade}$, pari a $+20 (\#\text{zeri} - \#\text{poli}) = 20(1 - 3) = -40\text{dB/decade}$.

Diagramma di Bode asintotico della fase Il diagramma di Bode della fase assume inizialmente il valore $\angle\mu - 90^\circ g = 0^\circ$. A $\omega = 0.1$ il polo p_1 negativo contribuisce con una variazione di fase a scalino di -90° . A $\omega = 1$ lo zero z_1 negativo contribuisce a una variazione di fase di $+90^\circ$. In $\omega = 10$ i due poli reali p_2 e p_3 negativi contribuiscono a una variazione di fase di $-2 \cdot 90^\circ = -180^\circ$.

In Figura 7 sono mostrati i diagrammi di Bode asintotici ed esatti del modulo e della fase.

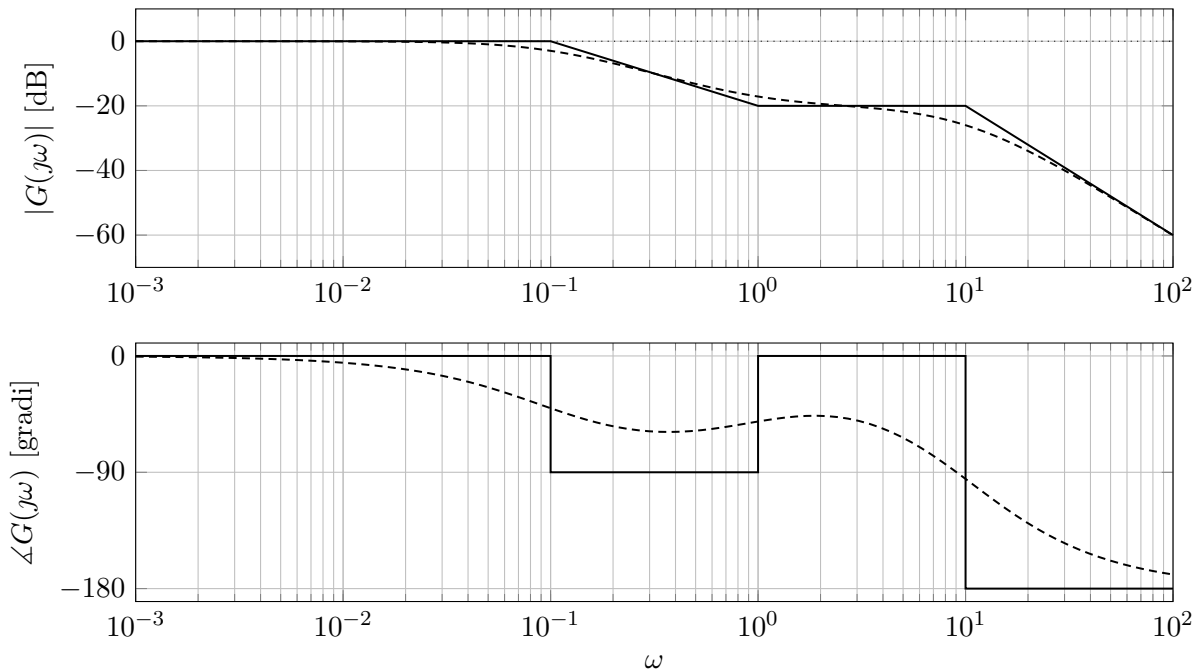


Figura 7: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata).

In bassa frequenza, il sistema si comporta come un sistema con funzione di trasferimento $\tilde{G}(s) = \mu$, in alta frequenza la pendenza è data da $20 \cdot (\#\text{zeri} - \#\text{poli}) = 20 \cdot (1 - 3) = -40\text{dB/decade}$.

Osservazione 3. *Il sistema si comporta come un filtro passa basso, come già evidenziato al punto precedente.*

I risultati ottenuti per $y_{i,\infty}(t)$, $i = 1, \dots, 4$, si possono ottenere sulla base dei diagrammi appena tracciati, leggendo su di essi i valori di $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$ per le pulsazioni di interesse.

- $u_1(t) = 2 \sin\left(0t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} |G(j0)|_{\text{dB}} \simeq 0\text{dB} &\Rightarrow |G(j0)| \simeq 1 \\ \angle G(j0) \simeq 0^\circ &= 0\text{rad} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$y_{1,\infty}(t) = 2 \sin\left(0t + \frac{\pi}{2}\right) = 2$$

- $u_2(t) = \sin(0.01t)$

$$\begin{aligned} |G(j0.01)|_{\text{dB}} &\simeq 0 \quad \Rightarrow \quad |G(j0.01)| \simeq 1 \\ \angle G(j0.01) &\simeq 0 \end{aligned}$$

Quindi, si ottiene:

$$y_{2,\infty}(t) = \sin(0.01t)$$

- $u_3(t) = \sin(0.1t)$, dato che le altre singolarità distano almeno una decade dal polo in $\omega = 0.1$, il diagramma di Bode asintotico si può considerare una buona approssimazione, quindi si può ottenere:

$$\begin{aligned} |G(j0.1)|_{\text{dB}} &\simeq -3\text{dB} \quad \Rightarrow \quad |G(j0.1)| \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \angle G(j0.1) &\simeq -45^\circ = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

da cui:

$$y_{3,\infty}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(0.1t - \frac{\pi}{4}\right)$$

- $u_4(t) = 2 \cos(100t)$, dato che le altre singolarità distano almeno una decade dal polo in $\omega = 100$, il diagramma di Bode asintotico si può considerare una buona approssimazione, quindi si può ottenere:

$$\begin{aligned} |G(j100)|_{\text{dB}} &\simeq -60\text{dB} \quad \Rightarrow \quad |G(j100)| \simeq 10^{-3} \\ \angle G(j100) &\simeq -180^\circ = -\pi \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} y_{4,\infty}(t) &= 2 \cdot 10^{-3} \cos(100t - \pi) \\ &= -2 \cdot 10^{-3} \cos(100t) \end{aligned}$$

5. Per ottenere una approssimazione di ordine ridotto di bassa frequenza si possono guardare i diagrammi di Bode della risposta in frequenza e utilizzare un sistema a singolo polo $\tilde{G}(s)$. Il polo di $\tilde{G}(s)$ deve coincidere con la dinamica dominante, e il guadagno deve essere uguale a quello del sistema originale come mostrato in Figura 8.

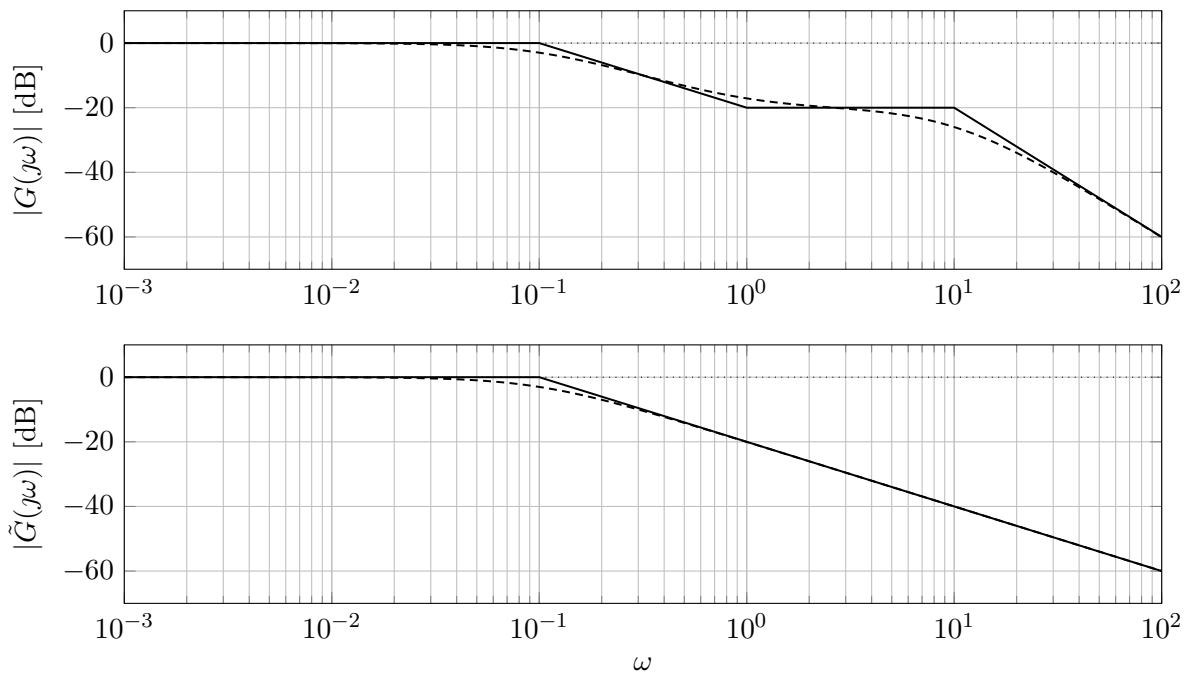


Figura 8: Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza del sistema e del sistema ridotto.

Si può ottenere quindi $\tilde{G}(s)$ come:

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(0)}{1 + \frac{s}{0.1}} = \frac{1}{1 + \frac{s}{0.1}}$$

La risposta allo scalino del sistema ridotto è molto simile alla risposta allo scalino del sistema originale, come si può notare dalla Figura 9.

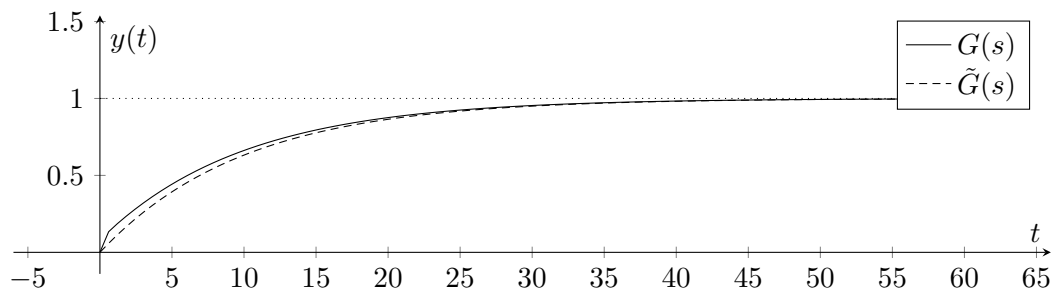


Figura 9: Risposte allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ e $\tilde{G}(s)$.

4 Analisi diagrammi di Bode

Si consideri un sistema lineare senza autovalori nascosti la cui funzione di trasferimento $G(s)$ ha associati i diagrammi di Bode della risposta in frequenza rappresentati in Figura 10.

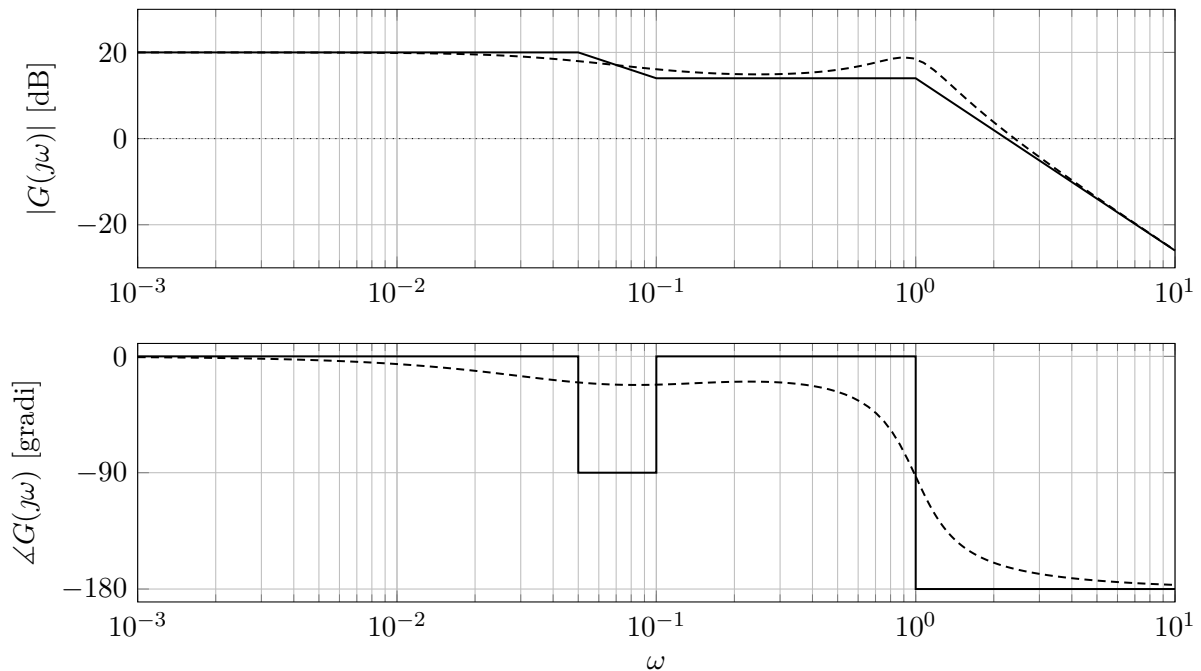


Figura 10: Diagrammi di Bode della risposta in frequenza associati a $G(s)$.

Rispondere in maniera chiara e precisa ai seguenti quesiti:

1. Dire, motivando la risposta, quanto valgono guadagno, tipo e moduli dei poli e zeri del sistema, se il sistema è asintoticamente stabile, se ha poli complessi o reali.
2. Dire, motivando la risposta, quale fra i gli andamenti riportati in Figura 11 rappresenta la risposta allo scalino del sistema.

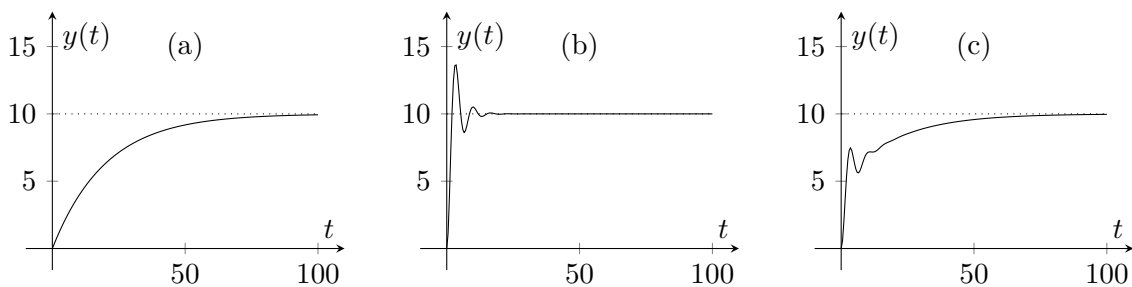


Figura 11: Alternative per la risposta allo scalino.

Soluzione

1. Si procede per punti:

- Il tipo del sistema è $g = 0$, perché la pendenza del diagramma asintotico del modulo è nulla a basse pulsazioni ($\omega < 0.05$).
- Il guadagno del sistema è $\mu = 10$, perché nei diagrammi asintotici, a basse pulsazioni ($\omega < 0.05$), il modulo è 20dB e la fase è nulla.

- $G(s)$ ha un polo reale con modulo 0.05, perché la pendenza del diagramma asintotico del modulo diminuisce di 20dB/decade alla pulsazione $\omega = 0.05$. Il polo è negativo dato che la fase diminuisce di 90° nel diagramma asintotico della fase ad $\omega = 0.05$.
 - $G(s)$ ha un unico zero (e quindi è anche necessariamente reale) con modulo 0.1. Infatti, la pendenza del diagramma asintotico del modulo aumenta di 20dB/decade alla pulsazione $\omega = 0.1$. Più precisamente si tratta di uno zero reale negativo (quindi pari a -0.1), perché alla pulsazione $\omega = 0.1$ la fase aumenta di 90° nel diagramma asintotico della fase.
 - $G(s)$ ha due poli complessi coniugati a parte reale negativa e modulo (o equivalentemente pulsazione naturale) pari a $\omega_n = 1$, perché la pendenza del diagramma asintotico diminuisce di 40dB/decade alla pulsazione $\omega = 1$. Si capisce che si tratta di poli complessi, e non reali coincidenti, dato che il diagramma di Bode del modulo esatto presenta un picco di risonanza. Si deduce che i due poli sono a parte reale negativa dato che la fase nel diagramma di Bode asintotico varia di -180° alla pulsazione $\omega = 1$. Dato che il picco di risonanza è evidente, allora il modulo dello smorzamento ξ dei poli è inferiore a $\sqrt{2}/2$.
 - Il sistema è asintoticamente stabile perché ha tutti poli a parte reale strettamente negativa, e non ha autovalori nascosti.
2. L'andamento corretto della risposta allo scalino è l'andamento (c) in Figura 11, perché il sistema ha due poli complessi coniugati con modulo pari a 1, e smorzamento in modulo inferiore a $\sqrt{2}/2$, ed uno reale con modulo pari a 0.05. La costante di tempo dominante è $\max\{\tau_1, \tau_2\}$, dove

$$\tau_1 = \frac{1}{0.05} = 20, \quad \tau_2 = \frac{1}{\xi\omega_n} > \sqrt{2}.$$

Si ha quindi $\tau_d \geq 20$, da cui si conclude che il transitorio si esaurisce in un tempo superiore a 100 unità di tempo. Per questa ragione, si può escludere il grafico (b). Inoltre, la presenza di poli complessi coniugati con un fattore di smorzamento minore di $\sqrt{2}/2$ fa sì che la risposta allo scalino presenti delle oscillazioni, le quali non sono presenti nel grafico (a).

5 Risposta a diversi ingressi

Si consideri un sistema dinamico lineare di ordine 3 con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s+1)^2}$$

Associare ai grafici con le risposte $y_a(t)$, $y_b(t)$, $y_c(t)$, $y_d(t)$ rappresentate in Figura 12 i seguenti ingressi:

1. $u_1(t) = \text{imp}(t)$;
2. $u_2(t) = e^t \text{sca}(t)$;
3. $u_3(t) = \sin(t) \text{sca}(t)$;
4. $u_4(t) = \sin(100t) \text{sca}(t)$.

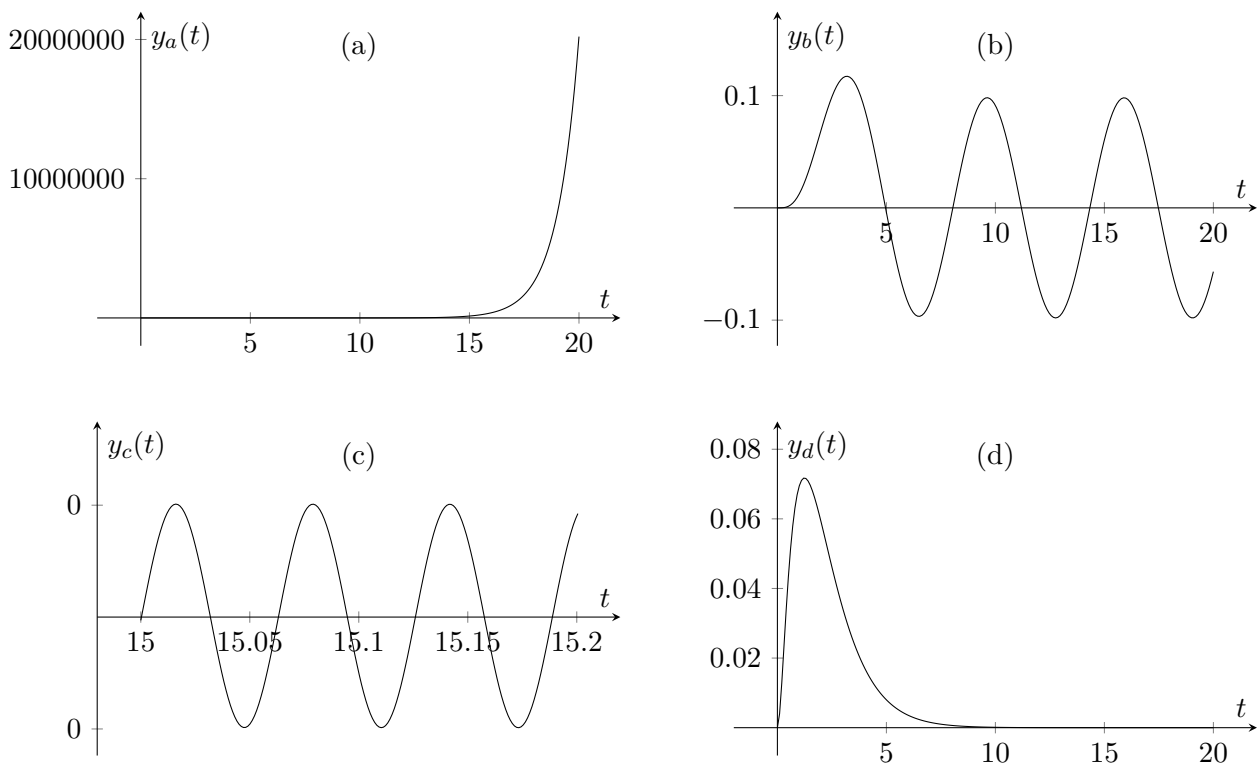


Figura 12: Risposte a ingressi diversi.

Soluzione

Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile per il criterio degli autovalori dato che:

- $p_1 = -5$,
- $p_2 = p_3 = -1$,

e i poli sono tutti e soli gli autovalori.

Si considerano quindi i segnali singolarmente:

1. Il segnale $u_1(t) = \text{imp}(t)$ ha una trasformata di Laplace $U_1(s) = \mathcal{L}[u_1(t)](s) = 1$. Si può quindi calcolare l'espressione della risposta $Y_1(s)$ nel dominio delle trasformate come:

$$Y_1(s) = G(s)U_1(s) = \frac{1}{(s+5)(s+1)^2} \cdot 1.$$

Il teorema del valore finale è applicabile e si ottiene che

$$y_{1,\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sY_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(s+5)(s+1)^2} = 0.$$

L'unico grafico che tende a zero per $t \rightarrow \infty$ è il grafico (d).

Alternativamente, si poteva scomporre $Y_1(s)$ in fratti semplici:

$$Y_1(s) = G(s)U_1(s) = \frac{1}{(s+5)(s+1)^2} \cdot 1 = \frac{\alpha}{s+5} + \frac{\beta}{s+1} + \frac{\gamma}{(s+1)^2}$$

da cui si può ricavare, antitrasformando, che

$$y_1(t) = \alpha e^{-5t} + \beta e^{-t} + \gamma t e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Per $t \rightarrow +\infty$ accade che $y_1(t) \rightarrow 0$, e quindi si giunge alla stessa conclusione.

2. Il segnare $u_2(t) = e^t \text{sca}(t)$ ha una trasformata di Laplace $U_2(s) = \mathcal{L}[u_2(t)](s) = \frac{1}{s-1}$. Si può quindi calcolare l'espressione della trasformata di Laplace $Y_2(s)$:

$$Y_2(s) = G(s)U_2(s) = \frac{1}{(s+5)(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s-1}$$

Dato che esiste una radice nel denominatore di $Y_2(s)$ che è reale e positiva, non si può applicare il teorema del valore finale. Si può però scomporre $Y_2(s)$ in fratti semplici, come:

$$Y_2(s) = \frac{\alpha}{s+5} + \frac{\beta}{s+1} + \frac{\gamma}{(s+1)^2} + \frac{\delta}{s-1}$$

da cui si può ricavare che

$$y_2(t) = \alpha e^{-5t} + (\beta + \gamma t)e^{-t} + \delta e^t.$$

Per $t \rightarrow +\infty$, $y_2(t)$ diverge a causa del contributo δe^t dovuto all'ingresso. L'unico grafico che ha un comportamento divergente è il grafico (a).

3. $u_3(t) = \sin(t) \text{sca}(t)$ è un segnale sinusoidale. Dato che il sistema è lineare e asintoticamente stabile, per il teorema della risposta in frequenza l'uscita di regime è ancora sinusoidale, con la stessa pulsazione della sinusoide di ingresso, ma riscalata e sfasata. La pulsazione dell'ingresso è:

$$\omega_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 2\pi.$$

L'uscita di regime ha quindi periodo 2π , cioè è il grafico (b).

Si può anche valutare il fattore di riscalatura dell'ampiezza come:

$$|G(j1)| = \frac{1}{|j+5| \cdot |j+1|^2} \simeq 10^{-1},$$

per cui la sinusoide in uscita a regime ha ampiezza 0.1. L'unico grafico che ha andamento sinusoidale, con ampiezza 0.1 e periodo pari a 2π è il (b).

4. $u_4(t) = \sin(100t) \text{sca}(t)$ è un segnale sinusoidale. Dato che il sistema è lineare e asintoticamente stabile, per il teorema della risposta in frequenza l'uscita di regime è ancora sinusoidale, con la stessa pulsazione della sinusoide di ingresso, ma riscalata e sfasata. La pulsazione dell'ingresso è:

$$\omega_4 = 100 \quad \Rightarrow \quad T_4 = \frac{2\pi}{\omega_4} = \frac{2\pi}{100} \simeq 0.063.$$

La sinusoide di regime ha quindi periodo $2\pi/100$ e ha ampiezza riscalata rispetto alla sinusoide in ingresso di:

$$|G(j100)| = \frac{1}{|j100+5| \cdot |j100+1|^2} \simeq 10^{-6}$$

per cui la sinusoide in uscita ha ampiezza 10^{-6} . L'unico grafico che ha andamento sinusoidale, con ampiezza 10^{-6} e periodo pari a $2\pi/100$ è il (c).

6 Analisi sistema di controllo

Si consideri il sistema di controllo rappresentato in Figura 13.

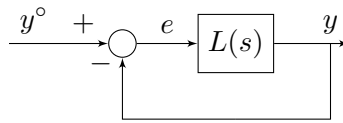


Figura 13: Schema del sistema di controllo.

in cui

$$L(s) = \frac{5}{s(1 + 0.05s)}.$$

Tipicamente, lo scopo di un sistema di controllo è quello di imporre un andamento desiderato $y^\circ(t)$, chiamato segnale di riferimento, e di progettare il sistema di controllo in maniera tale da rendere l'uscita $y(t)$ il più possibile simile al segnale di riferimento $y^\circ(t)$.

Si dica se il sistema di controllo dato è in grado di riprodurre correttamente in uscita il segnale di riferimento:

$$y^\circ(t) = a_1 \sin(0.5t + \beta_1) + a_2 \sin(t + \beta_2) + a_3 \sin(100t + \beta_3)$$

dove $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2$ e β_3 sono parametri arbitrari non nulli.

Soluzione

Per prima cosa si ricava la funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $y(t)$, che è data da:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{5}{s(1 + 0.05s)}}{1 + \frac{5}{s(1 + 0.05s)}} = \frac{100}{(s + 10)^2} = \frac{1}{(1 + s/10)^2}.$$

Si tracciano, quindi, i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase, come mostrato in Figura 14.

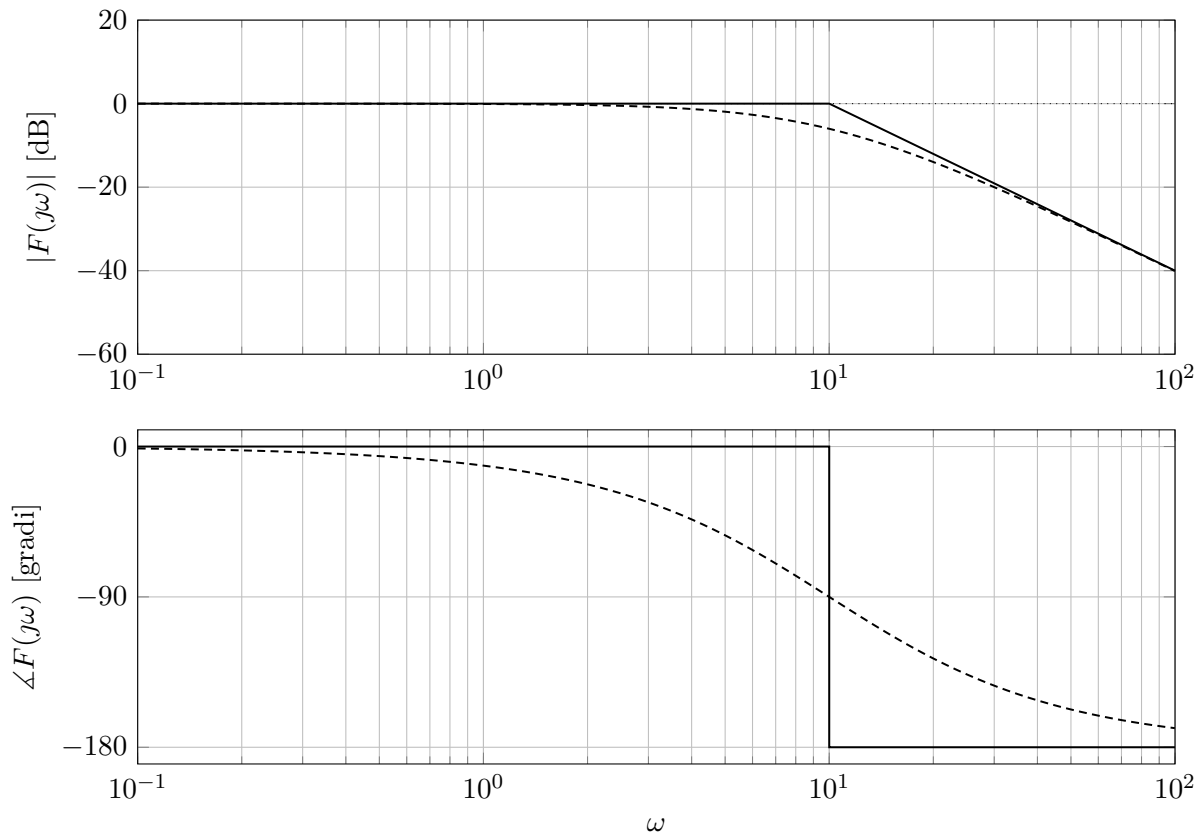


Figura 14: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) della risposta in frequenza del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$.

Per valutare se il segnale di riferimento $y^\circ(t)$ viene riprodotto correttamente sull'uscita $y(t)$, si applica il teorema della risposta in frequenza scomponendo il segnale nelle sue tre componenti sinusoidali. In particolare:

- $y_1^\circ(t) = a_1 \sin(0.5t + \beta_1)$, ha una pulsazione $\omega_1 = 0.5$ che viene riscalata, secondo il diagramma di Bode asintotico del modulo, di un fattore 1 e sfasata, secondo il diagramma di Bode asintotico della fase, di un angolo di 0° . Questa componente passa sull'uscita senza essere alterata.
- $y_2^\circ(t) = a_2 \sin(t + \beta_2)$, ha una pulsazione $\omega_2 = 1$ che viene riscalata, secondo il diagramma di Bode asintotico del modulo, di un fattore 1 e sfasata, secondo il diagramma di Bode asintotico della fase, di un angolo di 0° . Anche questa componente passa sull'uscita senza essere alterata.
- $y_3^\circ(t) = a_3 \sin(100t + \beta_3)$, ha una pulsazione $\omega_3 = 100$ che viene riscalata, secondo il diagramma di Bode asintotico del modulo, di un fattore $1/100$ e sfasata, secondo il diagramma di Bode asintotico della fase, di un angolo di circa -180° . Questa componente viene praticamente cancellata sull'uscita per l'azione filtrante del sistema di controllo.

In conclusione, le prime due componenti vengono riprodotte correttamente sull'uscita, mentre la terza componente viene filtrata e quindi non compare inalterata sull'uscita. Il segnale risultante $y(t)$ è mostrato in Figura 15, in cui è evidente che la componente in alta frequenza ha un effetto praticamente nullo sull'uscita.

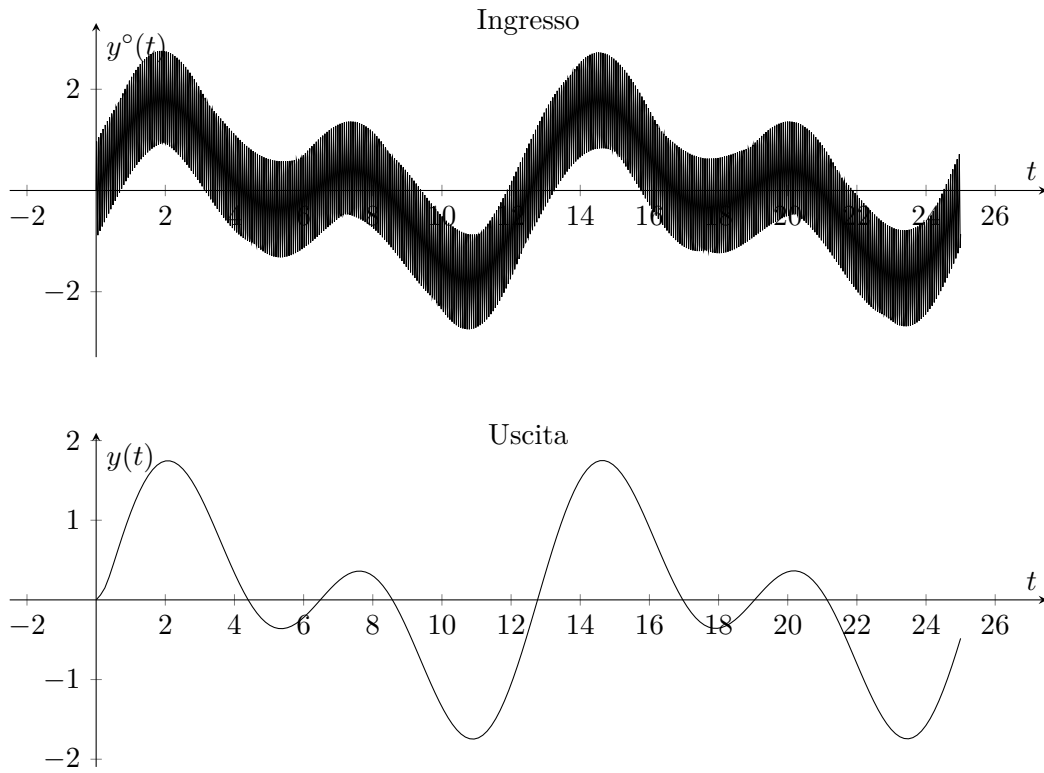


Figura 15: Il segnale di riferimento $y^o(t)$ è mostrato nel grafico in alto, mentre l'uscita filtrata $y(t)$ è mostrata nel grafico in basso.

Il segnale $y^o(t)$ non viene quindi riprodotto inalterato sull'uscita $y(t)$.