

# **Esercitazione 09: Analisi di stabilità dei sistemi di controllo**

23 maggio 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos  
alessandro.papadopoulos@polimi.it

**Fondamenti di Automatica**  
Prof. M. Farina

# 1 Cruise control

Il cruise control è un esempio eccellente di controllo in retroazione che si può trovare in molte automobili moderne. Lo scopo del cruise control è quello di mantenere la velocità del veicolo costante anche a fronte di disturbi esterni, come ad esempio il vento o la pendenza della strada. Questo è ottenuto misurando la velocità del veicolo, comparandola con la velocità desiderata e aggiustando automaticamente l'accelerazione secondo una legge di controllo.

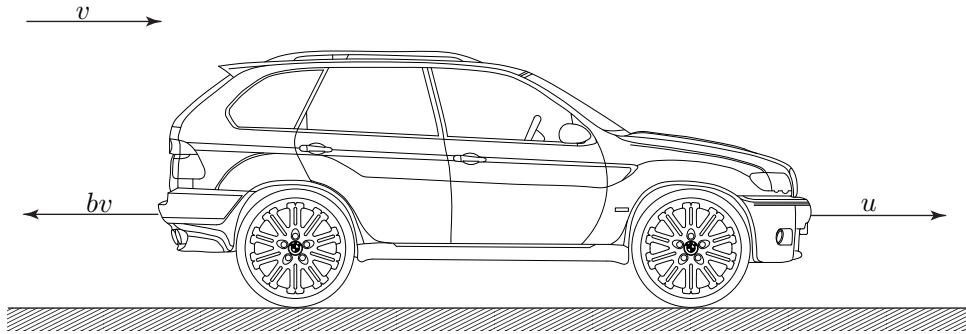


Figura 1: Diagramma di corpo libero.

Consideriamo un modello semplice della dinamica del veicolo, mostrato in Figura 1. Il veicolo, di massa  $m$ , è azionato tramite una forza di controllo  $u$ . La forza  $u$  rappresenta la forza generata dall'interfaccia strada/pneumatico. Per questo modello semplificato assumiamo che si controlla la forza direttamente, ignorando la dinamica del motore, delle ruote, etc., che sono coinvolte nella generazione della forza. Assumiamo che le forze che si oppongono al moto,  $bv(t)$ , dovute all'attrito volvente e all'effetto della resistenza dell'aria, dipendano linearmente con la velocità del veicolo  $v(t)$ , e agiscono nella direzione opposta al movimento del veicolo. Si consideri che la massa del veicolo è pari a  $m = 1000\text{kg}$ , e che il coefficiente d'attrito è  $b = 10\text{Ns/m}$ .

1. Calcolare la funzione di trasferimento  $P(s)$  del sistema con ingresso  $u(t)$  e uscita  $v(t)$ .
2. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase di  $P(s)$ .
3. Si consideri lo schema di controllo mostrato in Figura 2.

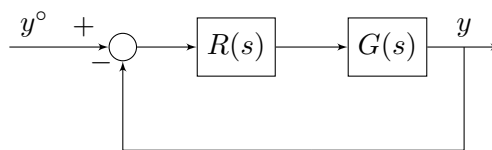


Figura 2: Schema di controllo.

Determinare la stabilità del sistema in anello chiuso quando  $R(s) = \frac{k}{s}$ , con  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ , e  $G(s) = P(s)$ .

4. Si supponga che l'attuatore, non considerato in fase di progetto abbia funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{1}{1+s}.$$

Dire, motivando la risposta, per quali valori di  $k$  il sistema di controllo di Figura 3 che include il controllore  $R(s) = \frac{k}{s}$  e l'attuatore con funzione di trasferimento  $A(s)$ , è ancora asintoticamente stabile.

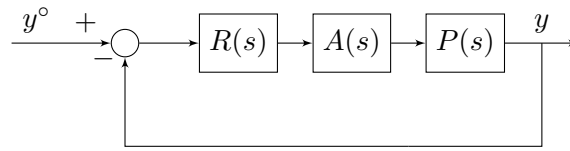


Figura 3: Schema di controllo.

5. Si supponga che l'attuatore, non considerato in fase di progetto abbia funzione di trasferimento:

$$A(s) = e^{-\tau s}, \quad \tau > 0.$$

Dire, motivando la risposta, per quali valori di  $\tau$  il sistema di controllo di Figura 3 che include il controllore  $R(s) = \frac{1}{s}$  e l'attuatore con funzione di trasferimento  $A(s)$ , è ancora asintoticamente stabile.

### Soluzione

1. Le equazioni del sistema possono essere scritte come:

$$\begin{cases} m\dot{v}(t) + bv(t) = u(t) \\ y(t) = v(t) \end{cases}$$

Per ottenere la funzione di trasferimento, si può riscrivere il sistema in trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} msV(s) + bV(s) = U(s) \\ Y(s) = V(s) \end{cases} \Rightarrow P(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b} = \frac{1}{1000s + 10} = \frac{0.1}{1 + 100s}$$

2. I diagrammi di Bode del modulo e della fase di  $P(s)$  sono mostrati in Figura 4.

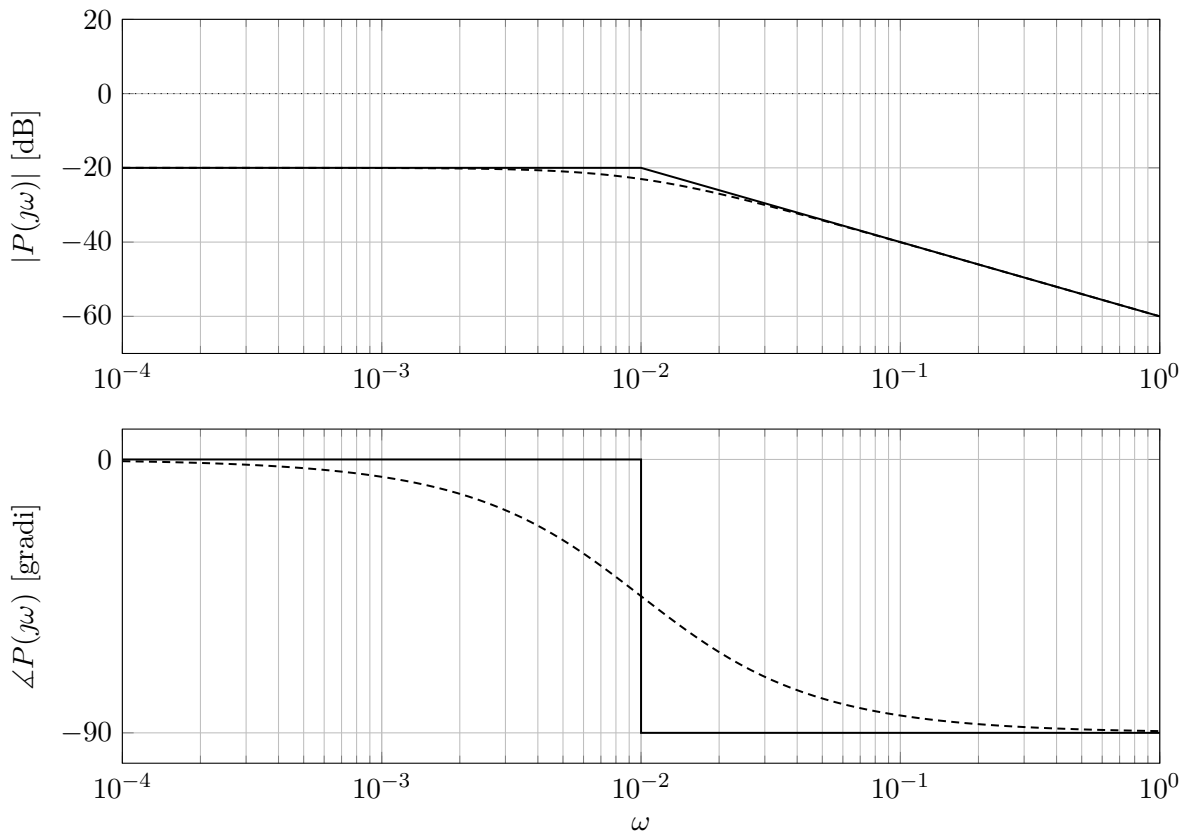


Figura 4: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a  $P(s)$ .

3. Per determinare la stabilità del sistema in anello chiuso, si considera la funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = R(s)P(s) = \frac{0.1k}{s} \frac{1}{1+s100}.$$

Si possono quindi tracciare i diagrammi di Bode per un valore di  $k$  generico, come mostrato in Figura 5.

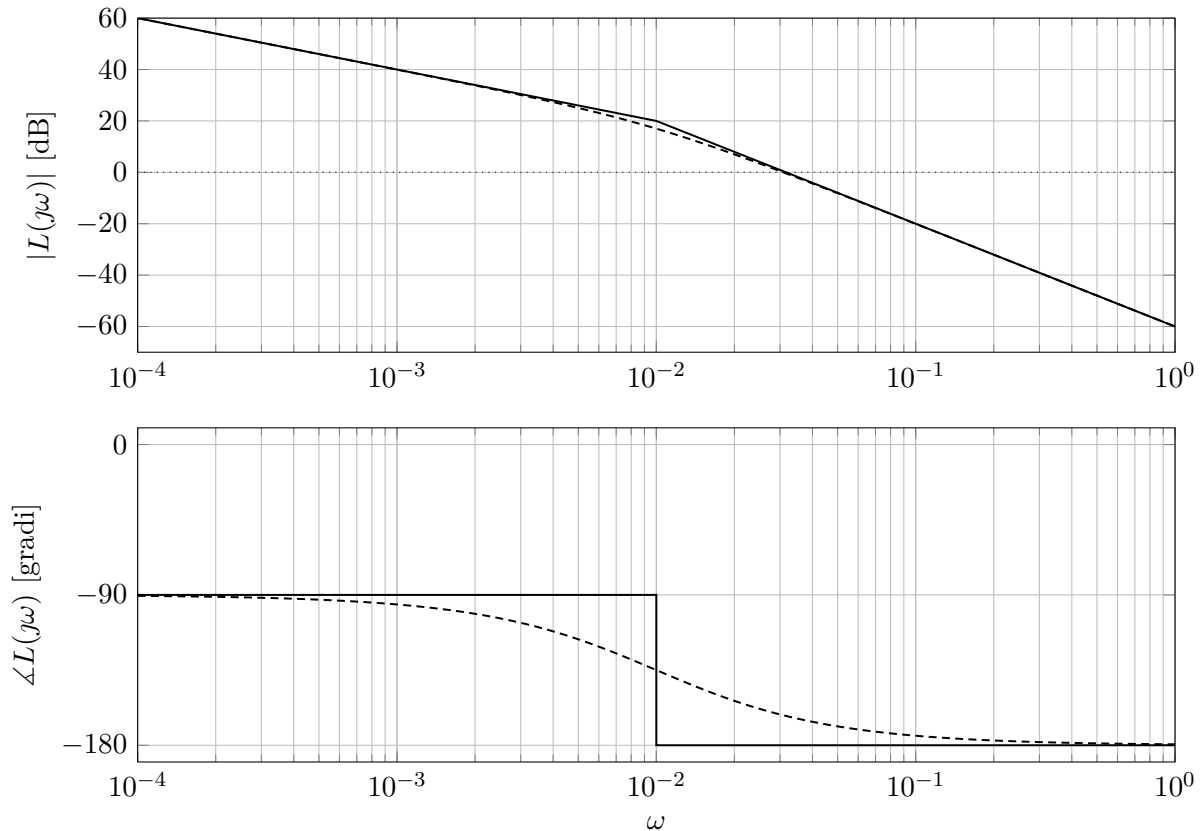


Figura 5: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a  $L(s)$ , con  $k = 1$ .

**Osservazione 1.** Si noti che dato che  $k > 0$ , il diagramma di Bode della fase rimane invariato al variare del valore di  $k$ . Inoltre, aumentare il valore di  $k$  significa traslare verso l'alto il diagramma di Bode del modulo e, viceversa, diminuire il valore di  $k$  significa traslare verso il basso il diagramma di Bode del modulo. Questo implica che variare il valore di  $k$  fa variare la pulsazione critica  $\omega_c$ .

Verifichiamo se si può applicare il criterio di Bode:

- $L(s)$  è strettamente propria;
- $L(s)$  non ha poli a parte reale strettamente positiva;
- la pulsazione critica, cioè la pulsazione  $\omega_c$  tale che  $|L(j\omega_c)| = 1$ , è ben definita dato che il diagramma di Bode del modulo attraversa una e una sola volta dall'alto verso il basso l'asse 0dB.

Si può quindi applicare il criterio di Bode.

Quindi verifichiamo le condizioni di stabilità secondo il criterio di Bode:

- $\mu_L = 0.1k > 0$

(b)  $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$ , dove  $\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$  è detta fase critica. Dato che  $\varphi_c > -180^\circ$ , succede che per qualunque valore di  $k$ ,  $\varphi_m > 0$ .

4. Se si include la dinamica dell'attuatore nel sistema di controllo, non è più vero che si può scegliere un qualunque valore di  $k$  affinché il sistema di controllo rimanga asintoticamente stabile. Infatti,  $L(s)$  diventa:

$$L(s) = \frac{0.1k}{s} \cdot \frac{1}{(1 + 100s)(1 + s)}$$

e i diagrammi di Bode del modulo e della fase cambiano come mostrato in Figura 6.

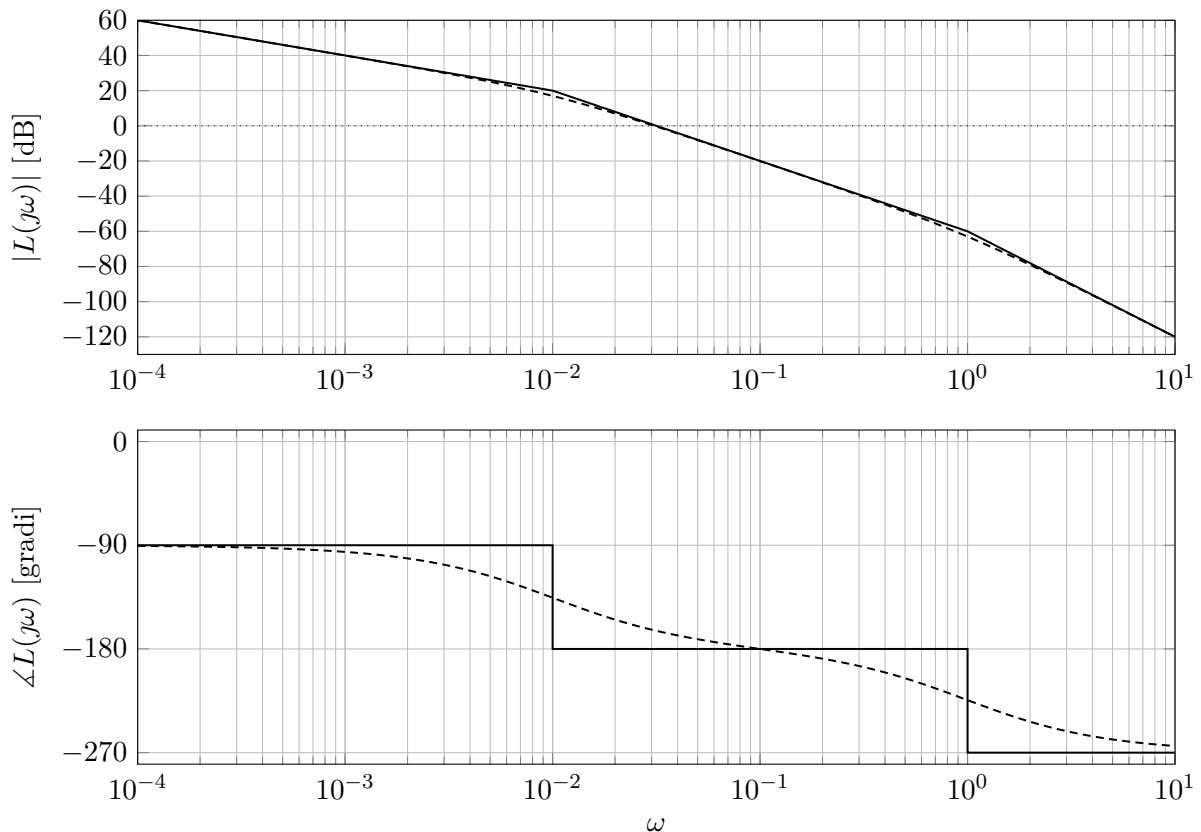


Figura 6: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a  $L(s)$ , con  $k = 1$ .

Notando ancora una volta che la fase non è influenzata dal valore di  $k$  e che però, questa volta, la fase raggiunge  $-270^\circ$ , è possibile ricavare quale è la pulsazione per cui la fase raggiunge  $-180^\circ$ :

$$\begin{aligned} -90^\circ - \arctan(\omega) - \arctan(100\omega) &= -180^\circ \\ \arctan(\omega) + \arctan(100\omega) &= 90^\circ \end{aligned}$$

Dato che:

$$\arctan(a) \pm \arctan(b) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{a \pm b}{1 \mp ab}\right), & \pm ab < 1 \\ \text{sign}(a)90^\circ, & \pm ab = 1 \\ \arctan\left(\frac{a \pm b}{1 \mp ab}\right) + \text{sign}(a)90^\circ, & \pm ab > 1 \end{cases}$$

Dato che la somma delle due arcotangenti deve fare  $90^\circ$ , allora deve essere che:

$$\begin{aligned}\omega \cdot 100\omega &= 1 \\ 100\omega^2 &= 1 \\ \omega &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

È quindi possibile avere al limite  $\bar{\omega}_c = 0.1 \text{ rad/s}$ , che si ottiene per:

$$\begin{aligned}|L(j0.1)| &= 1 \\ \frac{|0.1\bar{k}|}{|j0.1| \cdot |1 + 100j0.1| \cdot |1 + j0.1|} &= 1 \\ \frac{0.1\bar{k}}{0.1 \cdot \sqrt{1 + 10^2} \cdot \sqrt{1 + 10^{-2}}} &= 1 \\ \frac{\bar{k}}{\sqrt{1 + 10^2} \cdot \sqrt{1 + 10^{-2}}} &= 1 \\ \bar{k} = \sqrt{1 + 10^2} \sqrt{1 + 10^{-2}} &= \frac{101}{10} \simeq 10\end{aligned}$$

Se  $k < \bar{k}$  il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. Se  $k > \bar{k}$  il sistema è instabile.

5. La funzione d'anello in questo caso è:

$$L(s) = R(s)A(s)P(s) = \frac{0.1}{s} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{1 + 100s}$$

Si noti che il ritardo non cambia il diagramma di Bode del modulo, per cui è possibile calcolare quanto vale  $\omega_c$  in maniera analitica o tramite il tracciamento del diagramma di Bode del modulo (mostrato in Figura 7).

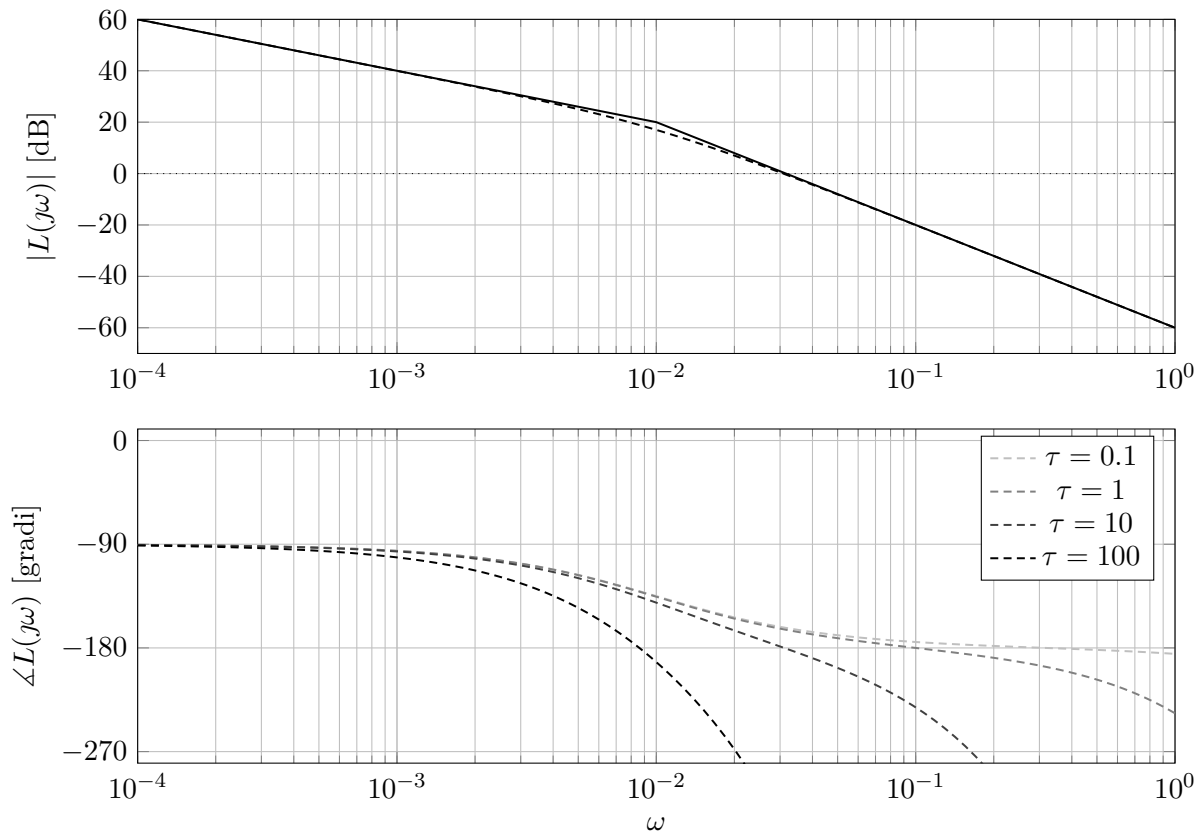


Figura 7: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a  $L(s)$ .

Procediamo per via analitica, e otteniamo quanto vale  $\omega_c$ :

$$\begin{aligned}
 |L(j\omega_c)| &= 1 \\
 \frac{|0.1|}{|j\omega_c|} \cdot \frac{1}{|1 + 100j\omega_c|} &= 1 \\
 \frac{0.1}{\omega_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 10^4\omega_c^2}} &= 1 \\
 \omega_c \sqrt{1 + 10^4\omega_c^2} &= 10^{-1} \\
 \omega_c^2 (1 + 10^4\omega_c^2) &= 10^{-2} \\
 10^4\omega_c^4 + \omega_c^2 - 10^{-2} &= 0 \\
 \omega_c^2 &= \frac{1}{2} \cdot (-1 + \sqrt{401}) \cdot 10^{-4} \\
 \omega_c &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (-1 + \sqrt{401})} \cdot 10^{-2} \simeq 0.03 \text{rad/s}
 \end{aligned}$$

Si può quindi calcolare il valore limite del ritardo calcolando per via analitica la fase:

$$\begin{aligned}
 \angle L(j\omega_c) &= -90^\circ - \arctan(100\omega_c) - \tau\omega_c \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -180^\circ \\
 71.565^\circ + \tau\omega_c \cdot \frac{180^\circ}{\pi} &= 90^\circ \\
 71.565^\circ + \tau\omega_c \cdot \frac{180^\circ}{\pi} &= 90^\circ \\
 \tau &= \frac{18.435}{0.03} \cdot \frac{\pi}{180} \simeq 10.725 \text{s.}
 \end{aligned}$$

## 2 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{100(1-s)}{(1+5s)(1+s/3)^2}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 8.

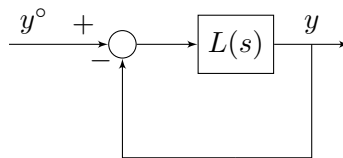


Figura 8: Schema di controllo.

### Soluzione

1. I diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase associati alla funzione di trasferimento  $L(s)$  sono mostrati in Figura 9.

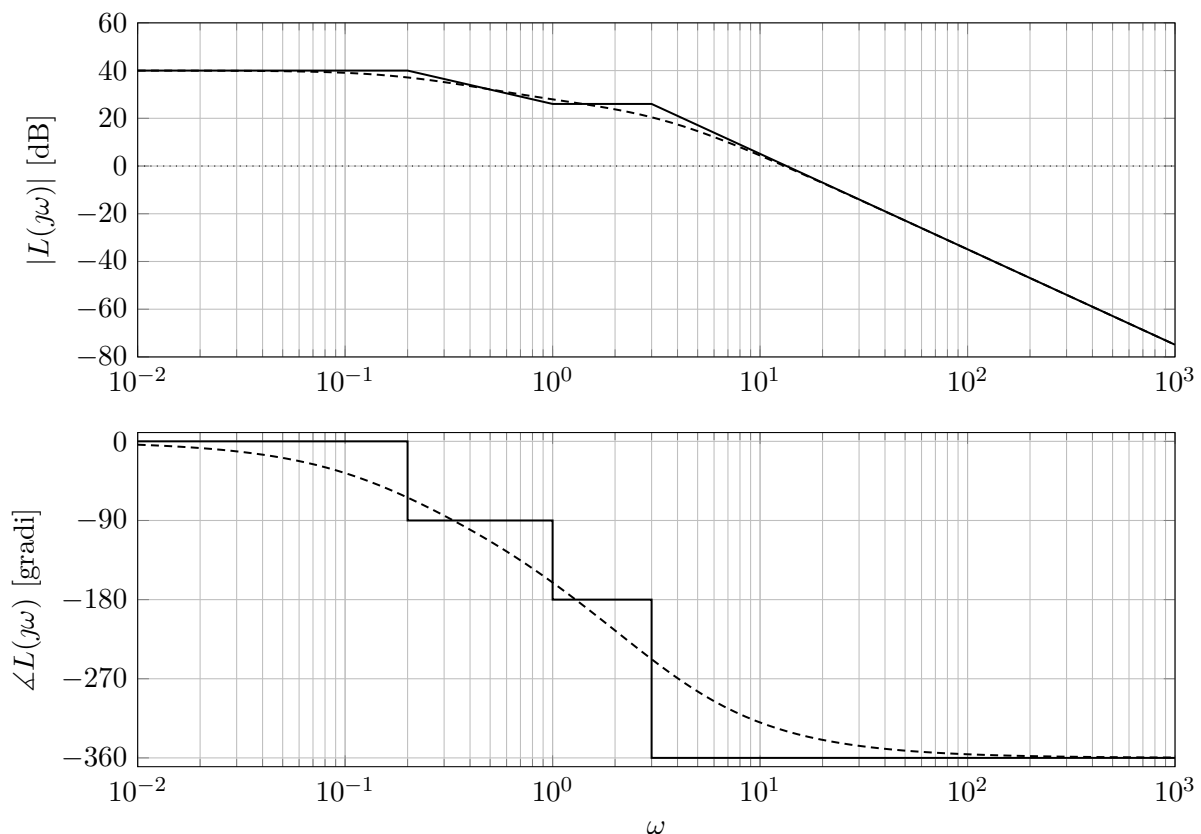


Figura 9: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a  $L(s)$ .

2. Per valutare la stabilità del sistema in retroazione, verifichiamo se è possibile applicare il criterio di Bode:
  - (a)  $L(s)$  è strettamente propria;



- (b)  $L(s)$  non ha poli a parte reale strettamente positiva;
- (c) la pulsazione critica, cioè la pulsazione  $\omega_c$  tale che  $|L(j\omega_c)| = 1$ , è ben definita dato che il diagramma di Bode del modulo attraversa una e una sola volta dall'alto verso il basso l'asse 0dB. Dal diagramma di Bode del modulo si può vedere che  $10 < \omega_c < 20$ .

Si può quindi applicare il criterio di Bode.

Quindi verifichiamo le condizioni di stabilità secondo il criterio di Bode:

- (a)  $\mu_L = 100 > 0$
- (b)  $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$ , dove  $\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$  è detta fase critica. Dal diagramma di Bode della fase si vede che  $\varphi_c < -180^\circ$ , per cui  $\varphi_m < 0$ .

Si può quindi concludere che il sistema retroazionato è instabile.

### 3 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{400(1 - 2s)}{s^3 + 9s^2 + 8s}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 10.

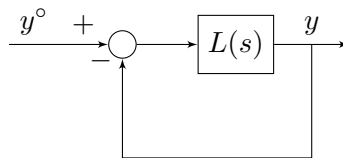


Figura 10: Schema di controllo.

#### Soluzione

1. Riscriviamo la funzione di trasferimento  $L(s)$  come:

$$L(s) = \frac{400(1 - 2s)}{s(s+1)(s+8)} = \frac{50}{s} \cdot \frac{(1 - 2s)}{(1 + s)(1 + s/8)}$$

I diagrammi di Bode asintotici e reali della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$  sono mostrati in Figura 11.

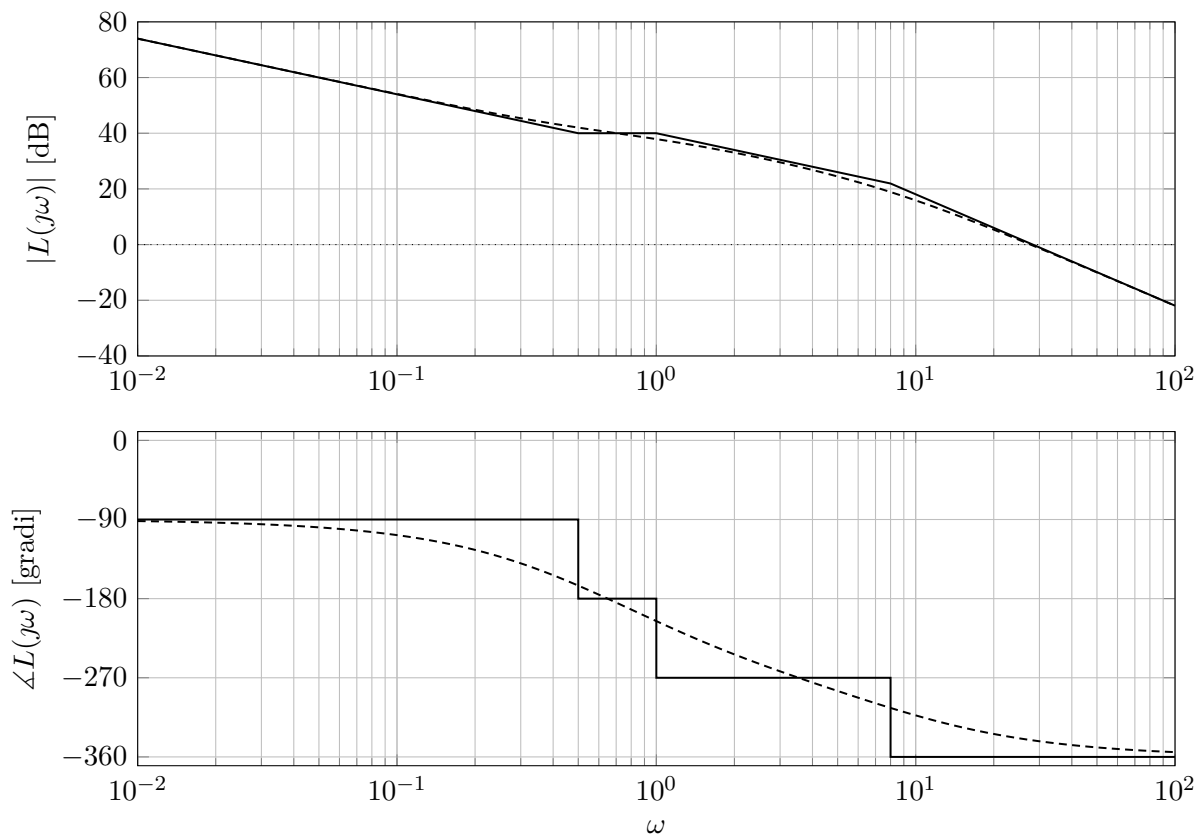


Figura 11: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a  $L(s)$ .

2. Per valutare la stabilità del sistema in retroazione, verifichiamo se è possibile applicare il criterio di Bode:

- (a)  $L(s)$  è strettamente propria;
- (b)  $L(s)$  non ha poli a parte reale strettamente positiva;
- (c) la pulsazione critica, cioè la pulsazione  $\omega_c$  tale che  $|L(j\omega_c)| = 1$ , è ben definita dato che il diagramma di Bode del modulo attraversa una e una sola volta dall'alto verso il basso l'asse 0dB. Dal diagramma di Bode del modulo si può vedere che  $\omega_c \simeq 30$ .

Si può quindi applicare il criterio di Bode.

Quindi verifichiamo le condizioni di stabilità secondo il criterio di Bode:

- (a)  $\mu_L = 50 > 0$
- (b)  $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$ , dove  $\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$  è detta fase critica. Dal diagramma di Bode della fase si vede che  $\varphi_c < -180^\circ$ , per cui  $\varphi_m < 0$ .

Si può quindi concludere che il sistema retroazionato è instabile.

## 4 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{1000(s + 10)}{(s - 5)(s + 20)^2}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 12.

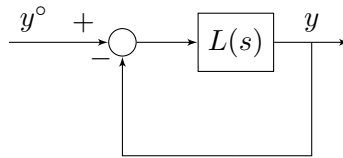


Figura 12: Schema di controllo.

### Soluzione

1. Riscriviamo la funzione di trasferimento  $L(s)$  come:

$$L(s) = \frac{1000(s + 10)}{(s - 5)(s + 20)^2} = -5 \frac{1 + s/10}{(1 - s/5)(1 + s/20)^2}$$

I diagrammi di Bode asintotici e reali della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$  sono mostrati in Figura 13.

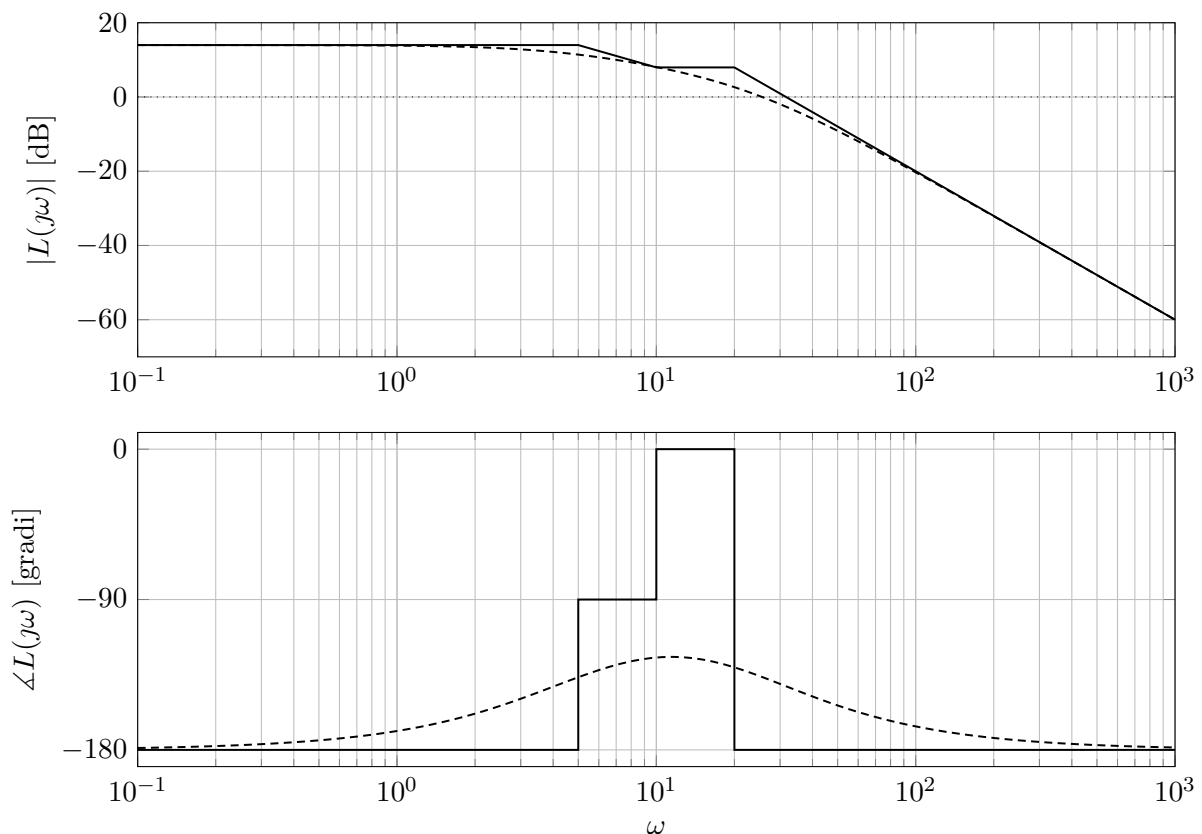


Figura 13: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a  $L(s)$ .

2. Dato che  $L(s)$  ha un polo in  $s = 5$ , non è possibile applicare il criterio di Bode. È quindi necessario applicare il criterio di Nyquist. Si può tracciare il diagramma di Nyquist di  $L(s)$  partendo dai diagrammi di Bode, come mostrato in Figura 14.

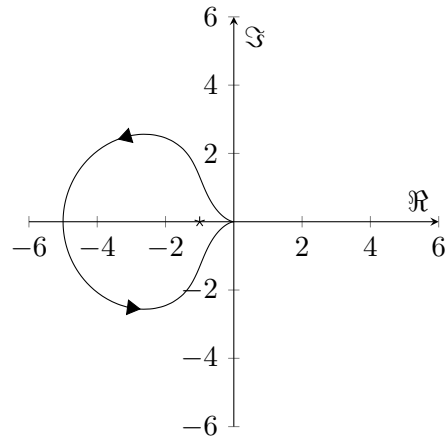


Figura 14: Diagrammi di Nyquist della risposta in frequenza associata a  $L(s)$ .

Il numero di giri contati positivamente in senso antiorario intorno al punto  $-1$  sono  $N = 1$ . Il numero di poli di  $L(s)$  nel semipiano destro sono  $P = 1$ . Dato che  $N = P$ , per il criterio di Nyquist, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

## 5 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{10s}{(1-s)^2(1+0.1s)}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 15.

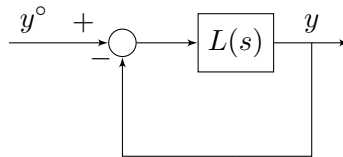


Figura 15: Schema di controllo.

3. Si supponga di connettere il sistema come mostrato in Figura 16. Dire per quali valori del parametro  $k > 0$  il sistema rimane asintoticamente stabile.

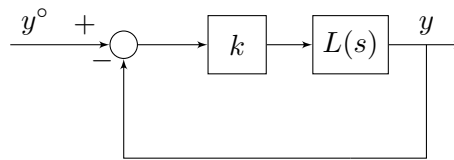


Figura 16: Schema di controllo.

### Soluzione

1. I diagrammi di Bode asintotici e reali della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$  sono mostrati in Figura 17.

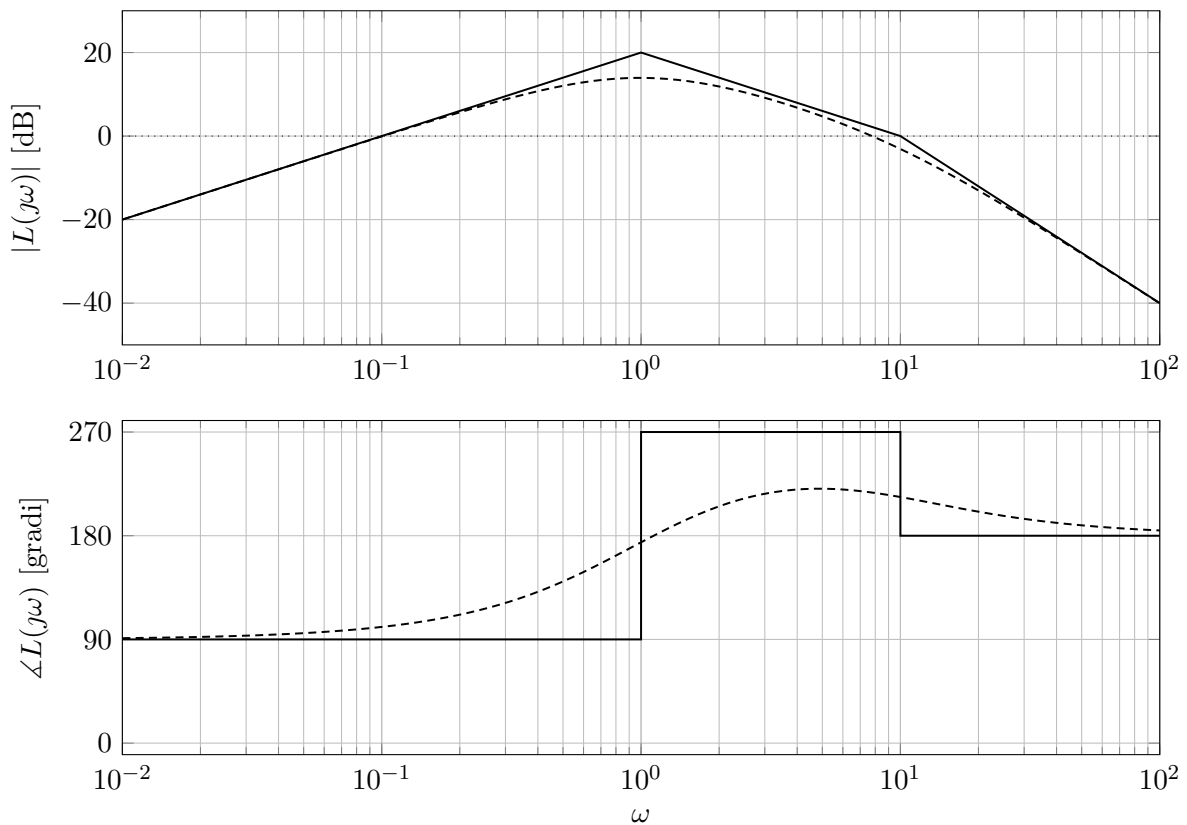


Figura 17: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a  $L(s)$ .

2. Dato che  $L(s)$  ha due poli in  $s = 1$ , non è possibile applicare il criterio di Bode. È quindi necessario applicare il criterio di Nyquist. Si può tracciare il diagramma di Nyquist di  $L(s)$  partendo dai diagrammi di Bode, come mostrato in Figura 18.

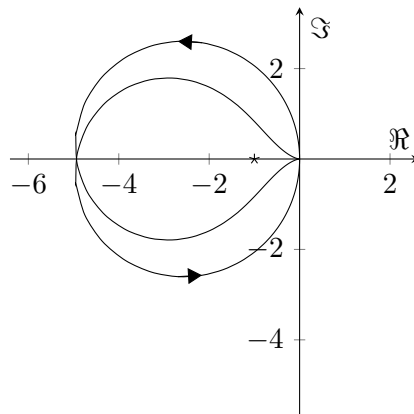


Figura 18: Diagrammi di Nyquist della risposta in frequenza associata a  $L(s)$ .

Il numero di giri contati positivamente in senso antiorario intorno al punto  $-1$  sono  $N = 2$ . Il numero di poli di  $L(s)$  nel semipiano destro sono  $P = 2$ . Dato che  $N = P$ , per il criterio di Nyquist, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3. Per il criterio di Nyquist, il diagramma di Nyquist di  $L(s)$  deve fare  $N = 2$  giri in senso antiorario intorno al punto  $-1$  sull'asse reale. L'effetto di moltiplicare su  $k$  è di scalare il diagramma di Nyquist. Per cui qualunque valore di  $k$  che amplifica il diagramma di Nyquist preserva la stabilità dell'anello chiuso. Si deve quindi trovare il valore di  $k$  tale che il diagramma di Nyquist interseca

esattamente il punto  $-1$ . Per farlo possiamo procedere per via analitica individuando a quale pulsazione  $L(s)$  ha fase  $-180^\circ$  (si noti che per  $k > 0$  la fase non cambia).

Si calcola quindi:

$$\begin{aligned}\angle L(j\omega_\pi) &= 90^\circ - 2 \arctan(-\omega_\pi) - \arctan(\omega_\pi/10) = -180^\circ \\ 2 \arctan(\omega_\pi) - \arctan(\omega_\pi/10) &= -270^\circ \\ 2 \arctan(\omega_\pi) - \arctan(\omega_\pi/10) &= 90^\circ \\ \arctan(\omega_\pi) - \arctan\left(\frac{\omega_\pi - \omega_\pi/10}{1 + \omega_\pi^2/10}\right) &= 90^\circ \\ \arctan(\omega_\pi) - \arctan\left(\frac{\omega_\pi - \omega_\pi/10}{1 + \omega_\pi^2/10}\right) &= 90^\circ\end{aligned}$$

Da cui si ricava che:

$$\begin{aligned}\omega_\pi \cdot \frac{\omega_\pi - \omega_\pi/10}{1 + \omega_\pi^2/10} &= 1 \\ \frac{9}{10}\omega_\pi^2 &= 1 + \frac{\omega_\pi^2}{10} \\ 4\omega_\pi^2 - 5 &= 0 \\ \omega_\pi &= \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Se si vuole trovare il valore limite  $\bar{k}$  tale per cui il diagramma di Nyquist di  $kL(s)$  attraversa il punto  $-1$  sull'asse reale, si impone che  $|\bar{k}L(j\omega_\pi)| = 1$ . Quindi:

$$\begin{aligned}|\bar{k}L(j\omega_\pi)| &= \frac{10\bar{k}\omega_\pi}{\sqrt{1 + \omega_\pi^2}\sqrt{1 + 10^{-2}\omega_\pi^2}} = 1 \\ \bar{k} &= \frac{(1 + \omega_\pi^2)\sqrt{1 + 10^{-2}\omega_\pi^2}}{10\omega_\pi} \\ \bar{k} &= \frac{\left(1 + \frac{5}{4}\right)\sqrt{1 + 10^{-2}\frac{5}{4}}}{10 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \\ \bar{k} &= \frac{9}{20\sqrt{5}}\sqrt{\frac{81}{80}} \\ \bar{k} &= \frac{9}{20\sqrt{5}} \cdot \frac{9}{4\sqrt{5}} = \frac{81}{400}\end{aligned}$$

Quindi per  $k > \bar{k}$  il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, per  $k < \bar{k}$  il sistema è instabile.