

Esercitazione 10: Prestazioni dei sistemi di controllo

27 maggio 2016 (2h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Analisi delle prestazioni del cruise control

Si consideri il sistema di controllo per il cruise control di un'automobile mostrato in Figura 1.

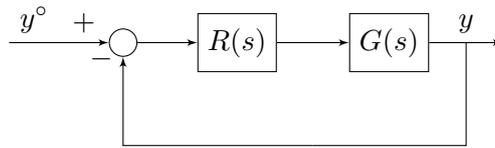


Figura 1: Schema di controllo.

In particolare, si ha che:

$$G(s) = \frac{1}{ms + b} \cdot \frac{1}{1 + s/10}$$

dove $m = 1000\text{kg}$, $b = 10\text{Ns/m}$. Le prestazioni richieste del sistema di controllo sono:

- Il sistema di controllo deve portare l'automobile alla velocità desiderata in circa 5s.
- La risposta allo scalino unitario del segnale di riferimento non deve presentare oscillazioni ripetute.
- La velocità reale dell'automobile non si può scostare dalla velocità desiderata di più del 2%.

1. Valutare quale dei seguenti controllori soddisfa le specifiche di progetto:

(a) $R_1(s) = 1000$

(b) $R_2(s) = \frac{1}{s}$

(c) $R_3(s) = \frac{10(1 + 100s)}{s}$

2. Tracciare la risposta allo scalino unitario del sistema di controllo con ingresso $y^\circ(t)$ e uscita $y(t)$ per i tre controllori.

Soluzione

1. Le tre specifiche si traducono in termini di pulsazione critica, margine di fase ed errore a transitorio esaurito:

(a) *Il sistema di controllo deve portare l'automobile alla velocità desiderata in circa 5s.* Questa specifica si traduce come un vincolo sulla pulsazione critica. In particolare viene richiesto $T_a \simeq 5$, ma il tempo di assestamento è legato alla pulsazione critica come:

$$T_a = \begin{cases} \frac{5}{\omega_c}, & \varphi_m \geq 75^\circ \\ \frac{5}{\xi\omega_c}, & 0 < \varphi_m < 75^\circ \end{cases}$$

con $\xi = \sin(\varphi_m/2)$. Si deve, quindi tradurre il vincolo sul tempo di assestamento come un vincolo sulla pulsazione critica come:

$$\omega_c \simeq \begin{cases} 1, & \varphi_m \geq 75^\circ \\ \frac{1}{\xi}, & 0 < \varphi_m < 75^\circ \end{cases}$$

- (b) *La risposta allo scalino unitario del segnale di riferimento non deve presentare oscillazioni ripetute.* Dato che la seconda specifica di progetto è che non ci siano oscillazioni ripetute nella risposta del sistema, ciò implica che si deve avere $\varphi_m \geq 75^\circ$.
- (c) *La velocità reale dell'automobile non si può scostare dalla velocità desiderata di più del 2%.* Per verificare infine che la terza specifica di progetto si considera il segnale $e(t)$, si calcola la funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $e(t)$ e si applica il teorema del valore finale con $y^\circ(t) = sca(t)$. La funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $e(t)$ è:

$$H(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

L'errore a transitorio esaurito si calcola quindi come:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\mu_L}{s^g}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu_L}$$

e si verifica che sia inferiore a 0.02.

Consideriamo i tre controllori separatamente:

- (a) Nel caso in cui $R_1(s) = 1000$, allora la funzione d'anello diventa:

$$L_1(s) = \frac{100}{(1 + 100s)(1 + s/10)}$$

Il diagramma di Bode di $L_1(s)$ è mostrato in Figura 2.

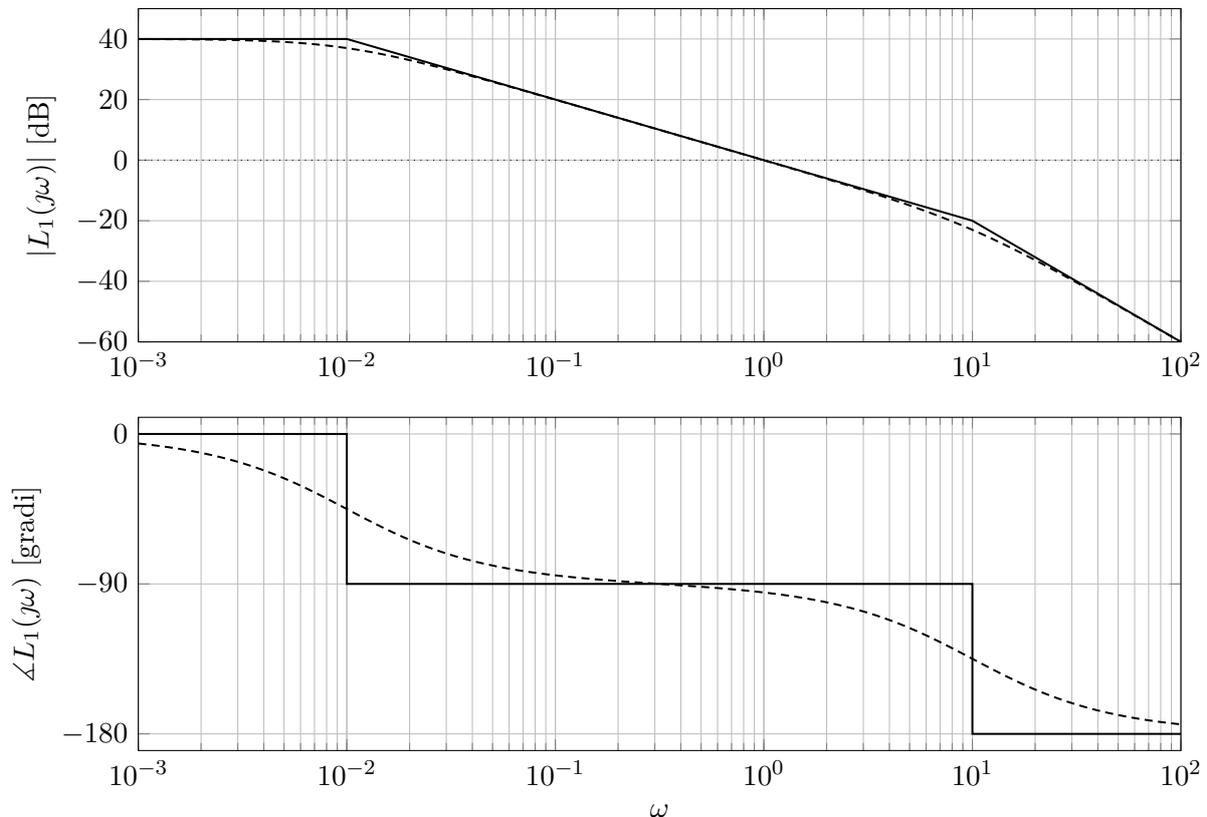


Figura 2: Diagramma di Bode di $L_1(s)$.

Innanzitutto verifichiamo che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. Verifichiamo le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode:

- i. $L_1(s)$ è strettamente propria;

- ii. $L_1(s)$ non ha poli nel semipiano destro;
- iii. ω_c è ben definita ed è circa $\omega_c \simeq 1\text{rad/s}$.

Si può quindi applicare il criterio di Bode. Dato che:

- i. $\mu_L = 100 > 0$
- ii. $\varphi_c \simeq -90^\circ$, $\varphi_m \simeq 90^\circ > 0$,

allora il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Verifichiamo dunque le prestazioni del sistema di controllo. Dato che il margine di fase $\varphi_m > 75^\circ$, la seconda specifica di progetto è soddisfatta. La prima specifica di progetto si traduce quindi come: $\omega_c \simeq 1\text{rad/s}$. Anche la prima specifica di progetto è soddisfatta. L'ultima specifica di progetto è che l'errore a transitorio esaurito sia inferiore al 2% del valore del segnale di riferimento. Nel caso in questione:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \mu_L} = \frac{1}{1 + 1000} = \frac{1}{1001} < 0.02$$

Il controllore in questione soddisfa tutte le specifiche di progetto.

- (b) Nel caso in cui $R_2(s) = 1/s$, allora la funzione d'anello diventa:

$$L_2(s) = \frac{0.1}{s(1 + 100s)(1 + s/10)}.$$

Il diagramma di Bode di $L_2(s)$ è mostrato in Figura 3.

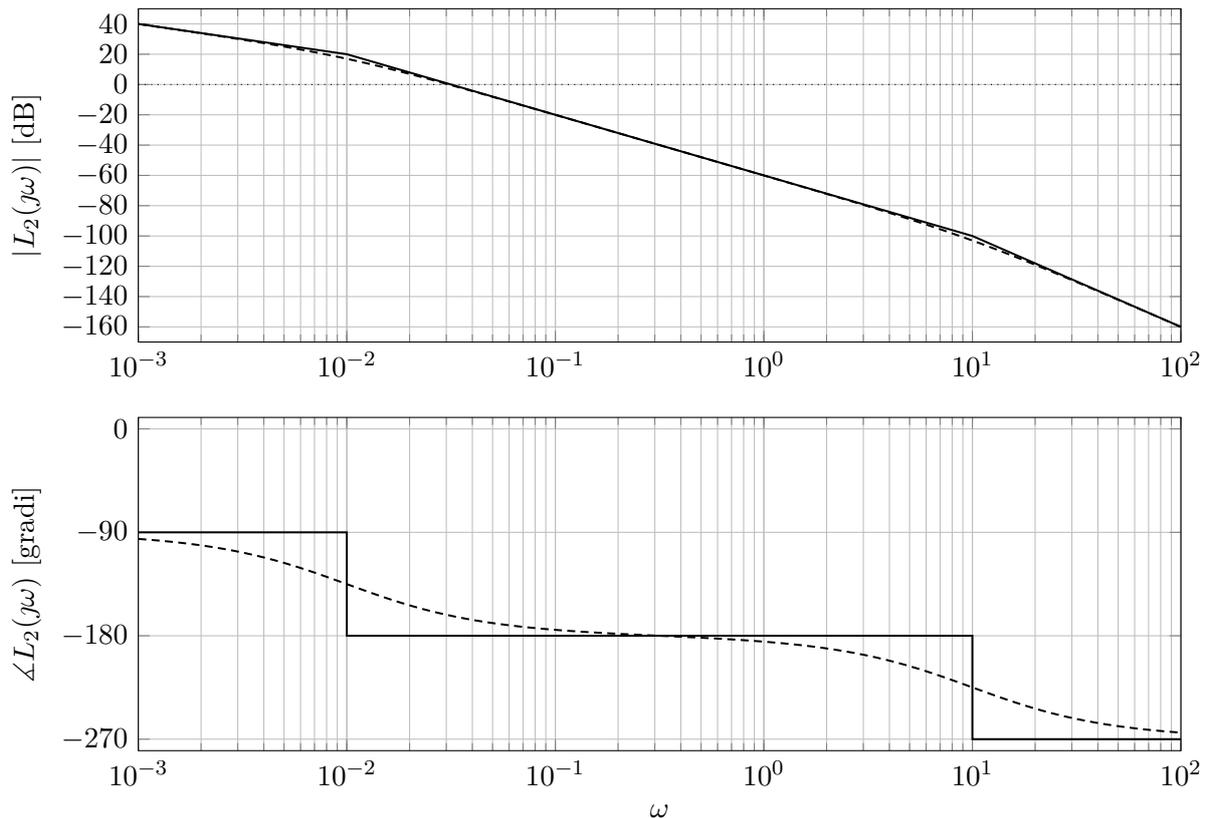


Figura 3: Diagramma di Bode di $L_2(s)$.

Innanzitutto verifichiamo che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. Verifichiamo le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode:

- i. $L_2(s)$ è strettamente propria;
- ii. $L_2(s)$ non ha poli nel semipiano destro;
- iii. ω_c è ben definita ed è circa $\omega_c \simeq 0.03\text{rad/s}$.

Si può quindi applicare il criterio di Bode. Dato che:

- i. $\mu_L = 0.1 > 0$
- ii. $\varphi_m > 0$,

allora il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Verifichiamo dunque le prestazioni del sistema di controllo. Calcoliamo φ_m per verificare la specifica sul margine di fase:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= -90^\circ - \arctan(100\omega_c) - \arctan(\omega_c/10) \\ &= -90^\circ - \arctan(3) - \arctan(310^{-3}) \\ &= -90^\circ - 72^\circ - 0.2^\circ \simeq -162^\circ \\ \varphi_m &= 180 - |\varphi_c| \simeq 18^\circ\end{aligned}$$

Dato che il margine di fase $\varphi_m < 75^\circ$, la seconda specifica di progetto è soddisfatta.

La prima specifica di progetto si traduce quindi come: $\omega_c \simeq 1/\xi \text{ rad/s}$, con $\xi \simeq 0.15$, quindi la pulsazione critica dovrebbe essere $\omega_c \simeq 6.6 \text{ rad/s}$. Dato che $\omega_c \simeq 0.03$, la prima specifica non è quindi soddisfatta. L'ultima specifica di progetto è che l'errore a transitorio esaurito sia inferiore al 2% del valore del segnale di riferimento. Nel caso in questione:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + \mu_L} = 0 < 0.02$$

Il controllore in questione non soddisfa tutte le specifiche di progetto.

- (c) Nel caso in cui $R_3(s) = \frac{10(1 + 100s)}{s}$, allora la funzione d'anello diventa:

$$L_3(s) = \frac{1}{s(1 + s/10)}.$$

Il diagramma di Bode di $L_3(s)$ è mostrato in Figura 4.

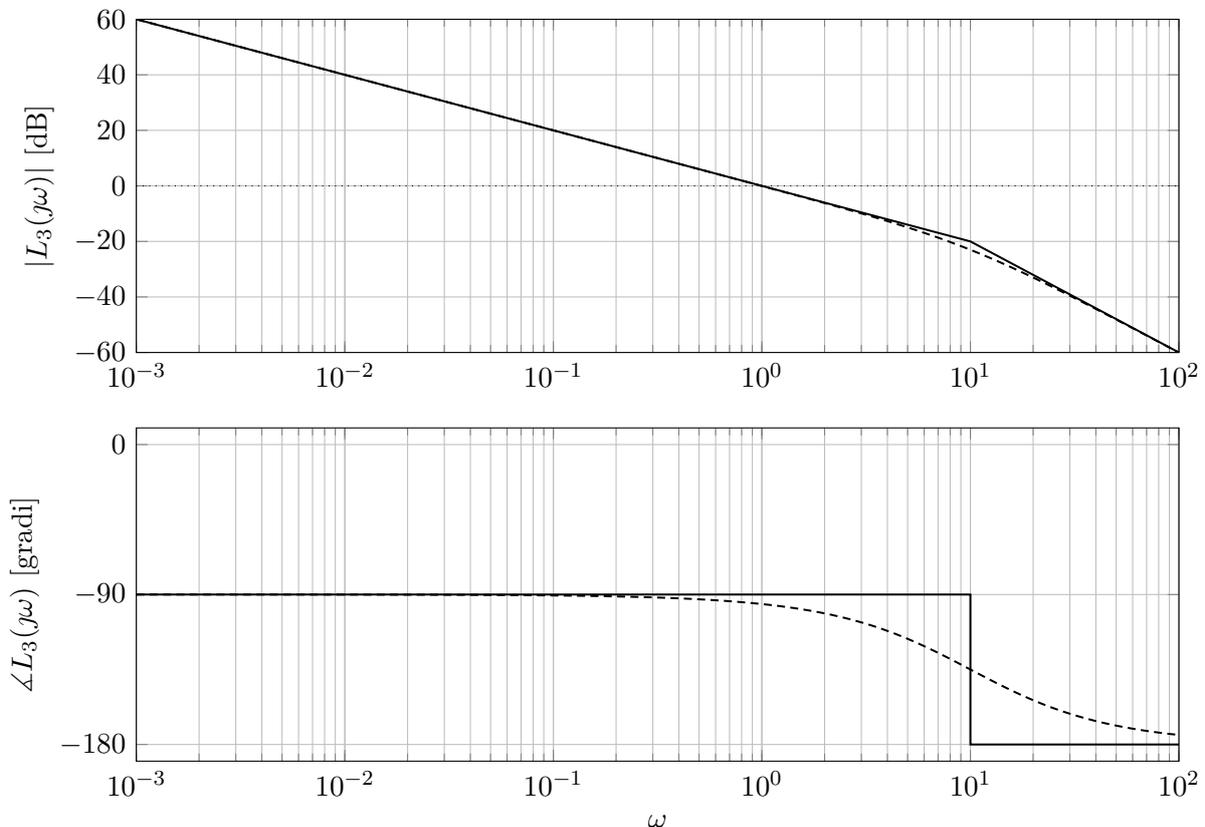


Figura 4: Diagramma di Bode di $L_3(s)$.

Innanzitutto verifichiamo che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. Verifichiamo le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode:

- i. $L_3(s)$ è strettamente propria;
- ii. $L_3(s)$ non ha poli nel semipiano destro;
- iii. ω_c è ben definita ed è circa $\omega_c \simeq 1\text{rad/s}$.

Si può quindi applicare il criterio di Bode. Dato che:

- i. $\mu_L = 1 > 0$
- ii. $\varphi_m > 0$,

allora il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Verifichiamo dunque le prestazioni del sistema di controllo. Calcoliamo φ_m per verificare la specifica sul margine di fase:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= -90^\circ - \arctan(\omega_c/10) \\ &= -90^\circ - \arctan(0.1) \\ &\simeq -90^\circ - 6^\circ = -96^\circ \\ \varphi_m &= 180 - |\varphi_c| \simeq 84^\circ\end{aligned}$$

Dato che il margine di fase $\varphi_m \geq 75^\circ$, la seconda specifica di progetto è soddisfatta.

La prima specifica di progetto si traduce quindi come: $\omega_c \simeq 1\text{rad/s}$. La prima specifica è quindi soddisfatta. L'ultima specifica di progetto è che l'errore a transitorio esaurito sia inferiore al 2% del valore del segnale di riferimento. Nel caso in questione:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + \mu_L} = 0 < 0.02$$

Il controllore in questione soddisfa tutte le specifiche di progetto.

2. Consideriamo i tre controllori separatamente.

- (a) Nel caso in cui $R_1(s) = 1000$, abbiamo trovato che il margine di fase è $\varphi_m \geq 75^\circ$, e che la $\omega_c \simeq 1\text{rad/s}$. Il sistema in anello chiuso, si comporta approssimativamente come:

$$F(s) \simeq \frac{\mu_L}{1 + \mu_L} \cdot \frac{1}{1 + s\omega_c} = \frac{100}{101} \cdot \frac{1}{1 + s}$$

La risposta allo scalino reale ($y(t)$) e approssimata ($\hat{y}(t)$) sono mostrate in Figura 5.

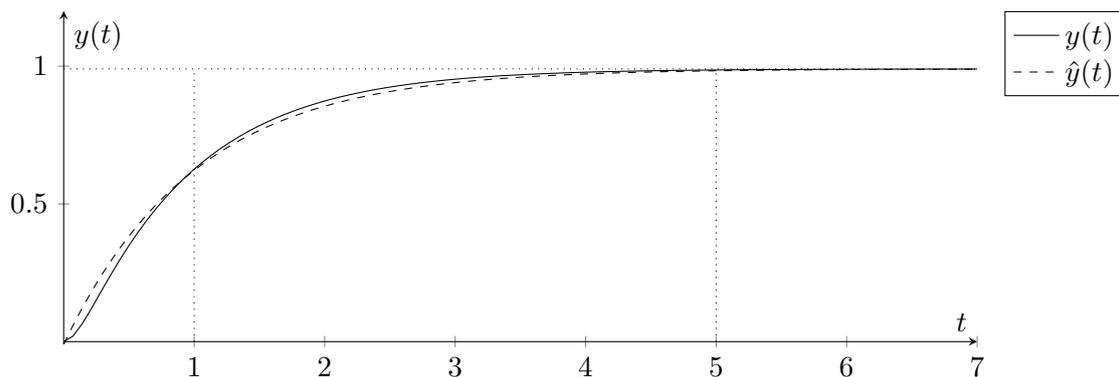


Figura 5: Risposta allo scalino del sistema di controllo con controllore $R_1(s)$.

- (b) Nel caso in cui $R_2(s) = 1/s$, abbiamo trovato che il margine di fase è $\varphi_m \simeq 18^\circ$, e che la $\omega_c \simeq 0.03\text{rad/s}$. Il sistema in anello chiuso, si comporta approssimativamente come:

$$F(s) \simeq \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_c}s + \frac{s^2}{\omega_c^2}}$$

Il tempo di assestamento sarà quindi di circa $T_a = \frac{5}{\xi\omega_c} \simeq 1065\text{s}$ ($\simeq 18$ minuti). La risposta allo scalino reale ($y(t)$) e approssimata ($\hat{y}(t)$) sono mostrate in Figura 6.

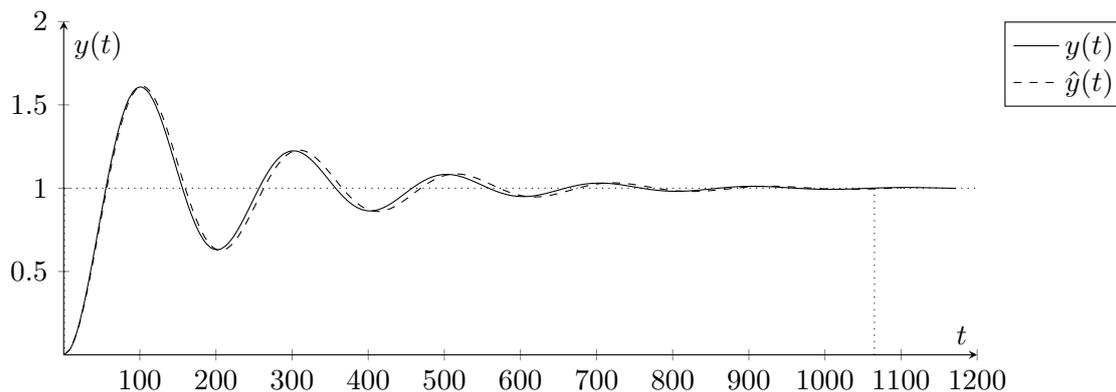


Figura 6: Risposta allo scalino del sistema di controllo con controllore $R_2(s)$.

- (c) Nel caso in cui $R_3(s) = \frac{10(1 + 100s)}{s}$, abbiamo trovato che il margine di fase è $\varphi_m \simeq 84^\circ$, e che la $\omega_c \simeq 1\text{rad/s}$. Il sistema in anello chiuso, si comporta approssimativamente come:

$$F(s) \simeq \frac{1}{1 + s\omega_c} = \frac{1}{1 + s}.$$

Il tempo di assestamento sarà quindi di circa $T_a \simeq 5\text{s}$. La risposta allo scalino reale ($y(t)$) e approssimata ($\hat{y}(t)$) sono mostrate in Figura 7.

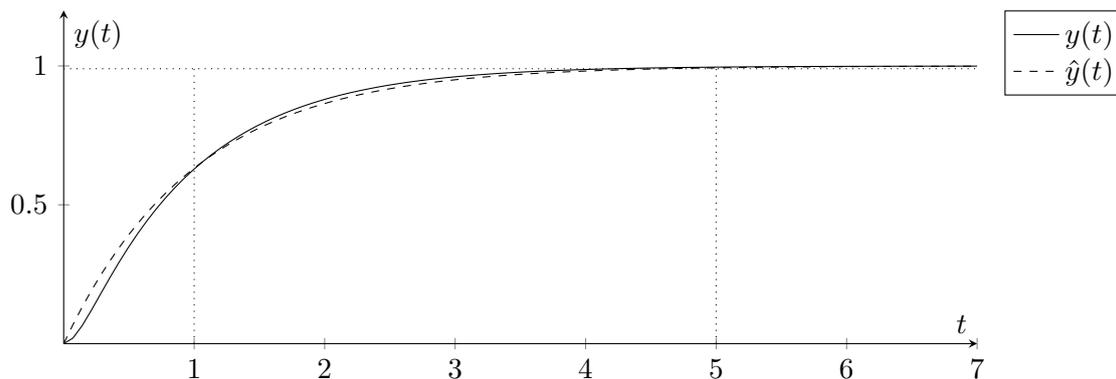


Figura 7: Risposta allo scalino del sistema di controllo con controllore $R_3(s)$.

2 Analisi delle prestazioni

Si consideri il sistema del II ordine, asintoticamente stabile, avente guadagno positivo e avente funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente al diagramma di Bode del modulo mostrato in Figura 8.

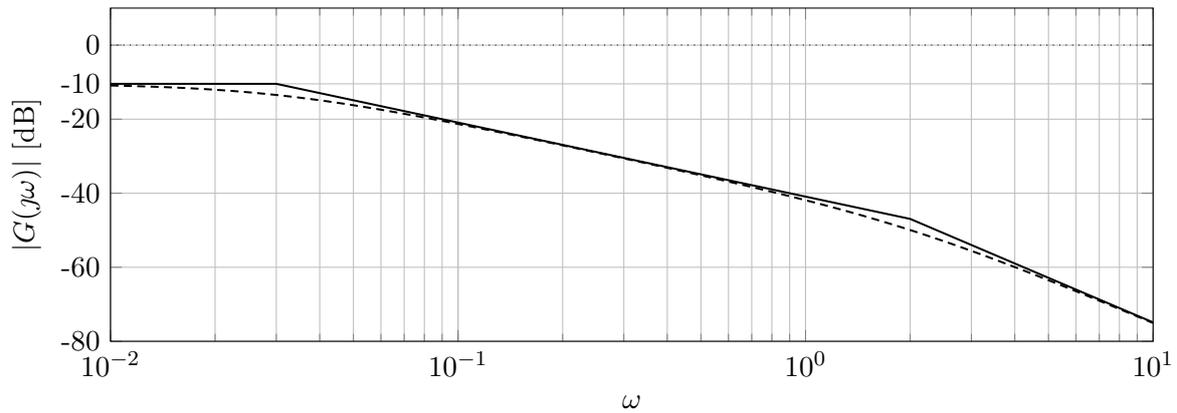


Figura 8: Diagramma di Bode del modulo di $G(s)$.

1. Si disegni in modo qualitativo la risposta allo scalino di ampiezza unitaria.
2. Si disegni il diagramma di Nyquist di $G(s)$.
3. Si discutano le proprietà di stabilità del sistema retroazionato in Figura 9 nei seguenti casi:
 - (a) $H(s) = 100$;
 - (b) $H(s) = -1$;
 - (c) $H(s) = 1$.

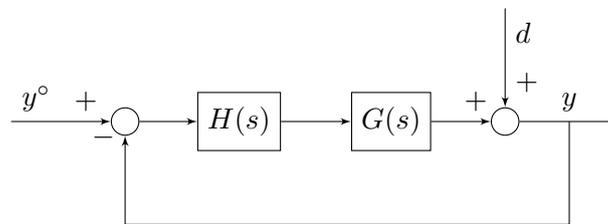


Figura 9: Sistema di controllo di riferimento.

4. Si consideri il caso $H(s) = 100$. Si descrivano le proprietà delle funzioni di trasferimento:
 - (a) Tra la variabile $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$;
 - (b) Tra il disturbo $d(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Soluzione

1. La risposta allo scalino unitario del sistema con funzione di trasferimento $L(s)$ è mostrata in Figura 10.

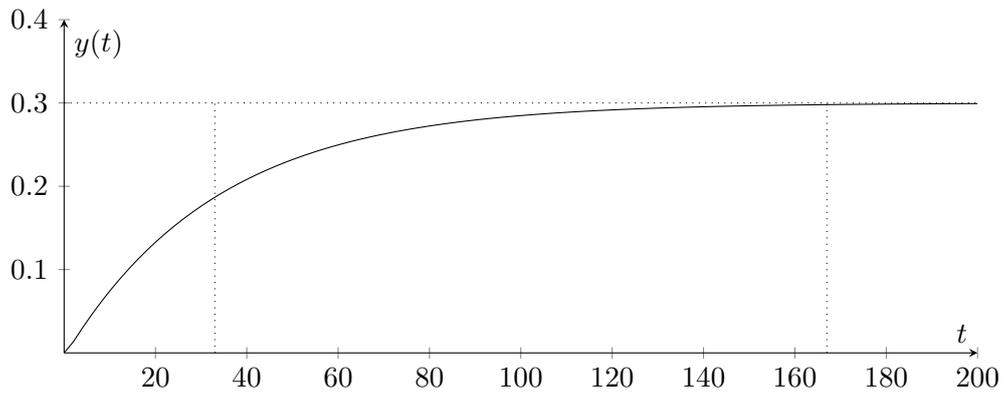


Figura 10: Risposta allo scalino unitario del sistema con funzione di trasferimento $L(s)$.

2. Per tracciare il diagramma di Nyquist, tracciamo il diagramma di Bode della fase (mostrato in Figura 11).

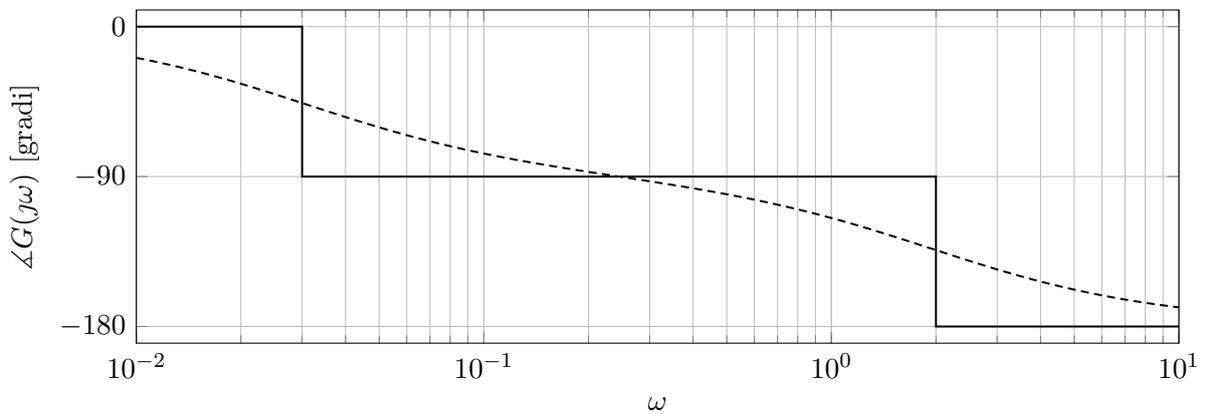


Figura 11: Diagramma di Bode della fase di $G(s)$.

Si può quindi tracciare il diagramma di Nyquist come mostrato in Figura 12.

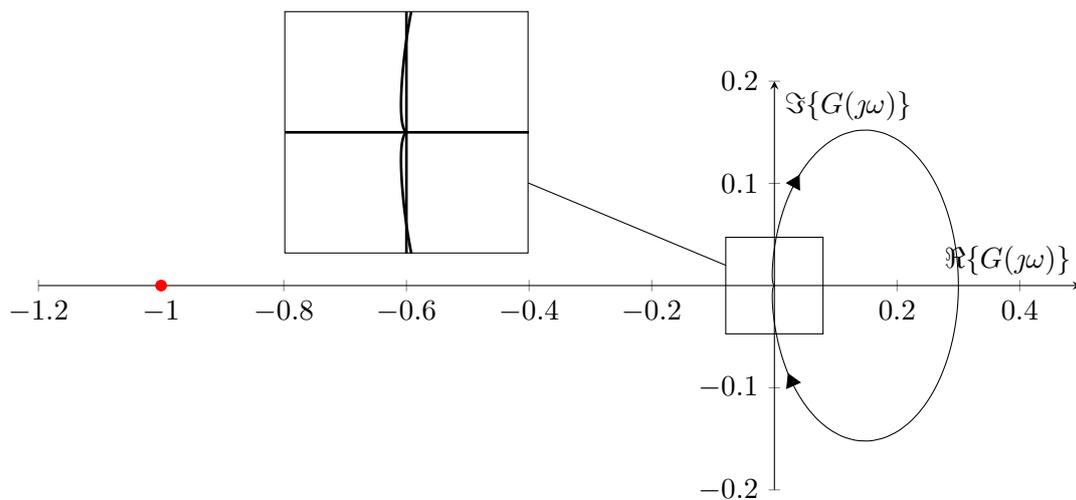


Figura 12: Diagramma di Nyquist di $G(s)$.

3. Per valutare la stabilità del sistema nei vari casi, si può sfruttare il criterio di Nyquist. In particolare:

- (a) Se $H(s) = 100$, il diagramma di Nyquist mostrato in Figura 12 si amplifica, ma non circonda il punto -1 sull'asse reale, per cui $N = 0$. Dato che $L(s)$ non ha poli nel semipiano destro ($P = 0$), si ha che $N = P$, per cui il sistema in retroazione è asintoticamente stabile.
- (b) Se $H(s) = -1$, il diagramma di Nyquist mostrato in Figura 12 si ribalta rispetto all'asse immaginario, ma non circonda il punto -1 sull'asse reale, per cui $N = 0$. Dato che $L(s)$ non ha poli nel semipiano destro ($P = 0$), si ha che $N = P$, per cui il sistema in retroazione è asintoticamente stabile.
- (c) Se $H(s) = 1$, il diagramma di Nyquist di $L(s)$ è quello mostrato in Figura 12 e non circonda il punto -1 sull'asse reale, per cui $N = 0$. Dato che $L(s)$ non ha poli nel semipiano destro ($P = 0$), si ha che $N = P$, per cui il sistema in retroazione è asintoticamente stabile.
4. Nel caso in cui $H(s) = 100$, il diagramma di Bode asintotico è mostrato in Figura 13. La funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $y(t)$ è:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$

Il modulo di $F(s)$ può essere approssimato come:

$$|F(j\omega)| \simeq \begin{cases} 1, & \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)|, & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

L'approssimazione del diagramma di Bode del modulo di $F(j\omega)$ è mostrato in Figura 13.

La funzione di trasferimento da $d(t)$ a $y(t)$ è:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}.$$

Il modulo di $F(s)$ può essere approssimato come:

$$|S(j\omega)| \simeq \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|}, & \omega \ll \omega_c \\ 1, & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

L'approssimazione del diagramma di Bode del modulo di $S(j\omega)$ è mostrato in Figura 13.

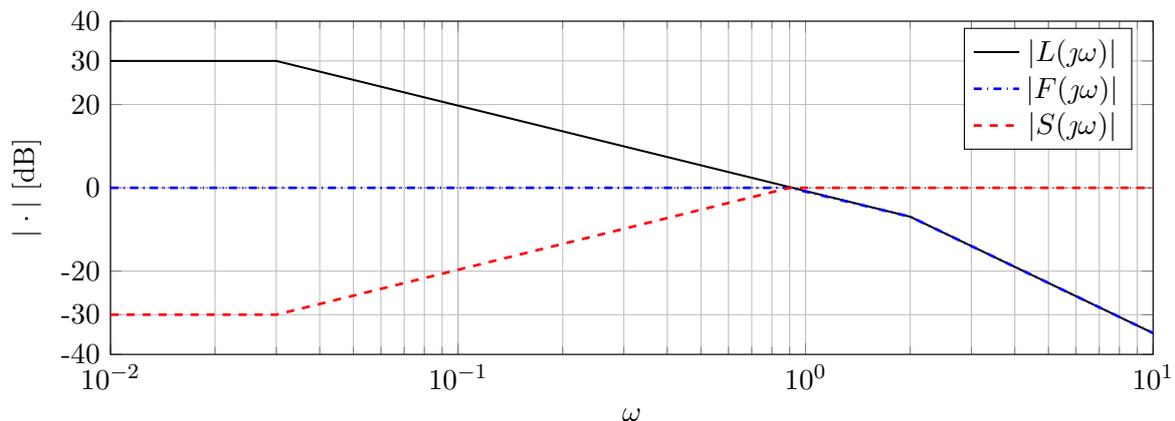


Figura 13: Diagramma di Bode del modulo di $L(s)$, di $F(s)$ e di $S(s)$.

3 Analisi delle prestazioni

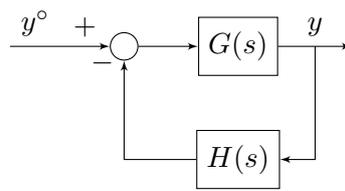


Figura 14: Sistema di controllo di riferimento.

Si consideri il sistema retroazionato descritto dallo schema a blocchi in Figura 14, dove $G(s)$ e $H(s)$ sono due funzioni di trasferimento prive di poli a parte reale positiva, con guadagno positivo, i cui moduli sono rappresentati in nel diagramma di Bode in Figura 15.

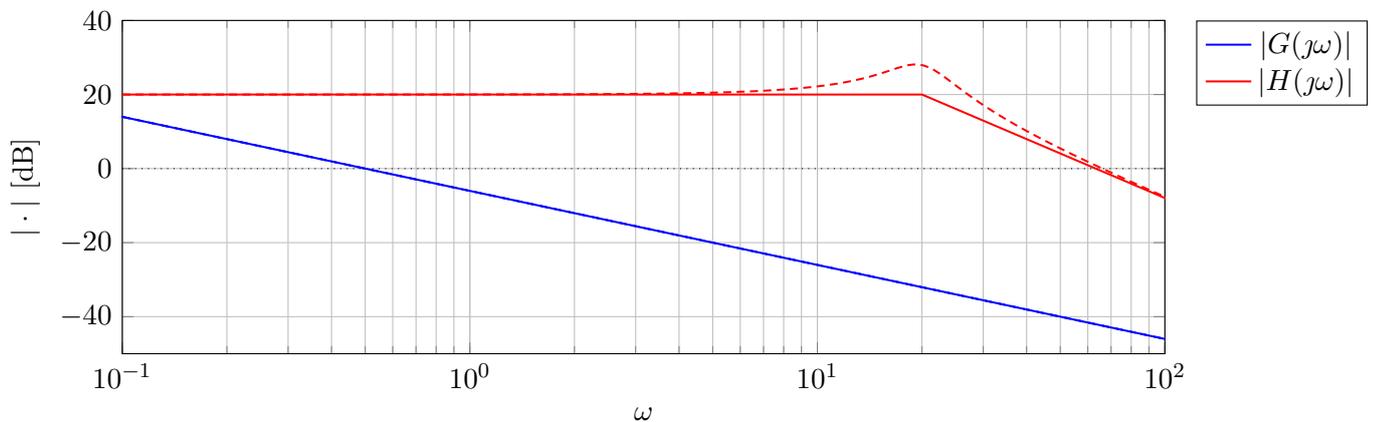


Figura 15: Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata a $G(s)$ e $H(s)$.

1. Valutare la pulsazione critica e il guadagno generalizzato di $L(s)$.
2. Dire se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Valutare approssimativamente il margine di fase di $L(s)$, spiegando il significato di tale indicatore nei riguardi della robustezza del sistema. Spiegare perché in questo caso il margine di fase non è un buon indicatore di robustezza.
3. Tracciare il diagramma di Bode del modulo (approssimato) relativo alla funzione di trasferimento in anello chiuso $F(s)$ da $y^o(t)$ a $y(t)$. Sulla base del diagramma così ricavato, tracciare inoltre l'andamento approssimato della risposta del sistema in anello chiuso ad un segnale di riferimento $y^o(t) = sca(t)$.
4. Discutere le variazioni del comportamento del sistema (stabilità, risposta a scalino) indotte rispettivamente da una riduzione e da un aumento di $H(s)$ di un fattore 10.

Soluzione

1. La funzione di trasferimento $L(s)$ è data da $L(s) = G(s)H(s)$. Il guadagno generalizzato di $L(s)$ sarà quindi dato da $\mu_L = \mu_G \cdot \mu_H$. Si può vedere dai diagrammi di Bode che $\mu_G = 0.5$ e $\mu_H = 10$, per cui $\mu_L = 5$.

$L(s)$ ha un polo nell'origine e altri due poli in $\omega = 20$. Per cui il tratto iniziale di $L(s)$ è dato da $5/s$. La pulsazione critica è quindi $\omega_c \simeq 5$.

2. I diagrammi di Bode di $L(s)$ sono mostrati in Figura 16.

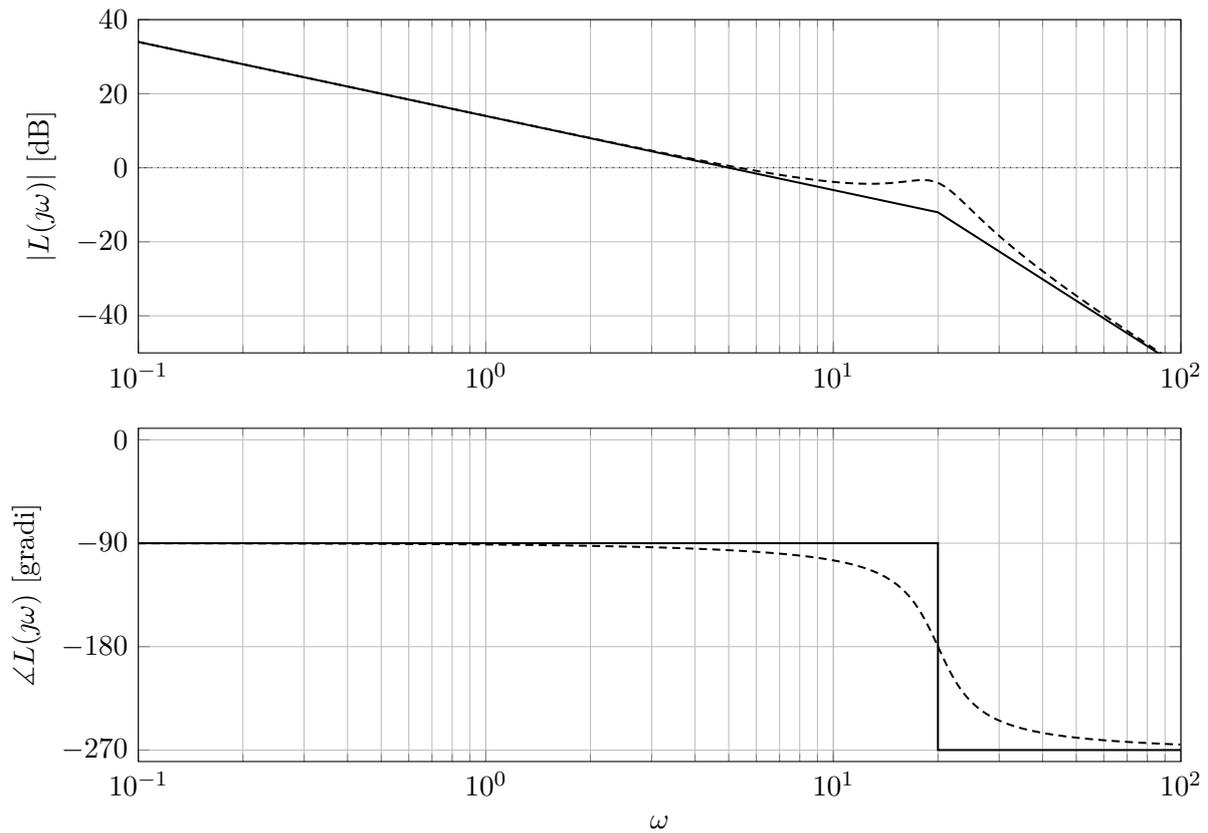


Figura 16: Diagramma di Bode della risposta in frequenza associata a $L(s)$.

Dai diagrammi di Bode è possibile verificare che il margine di fase è di circa 90° . In questo caso, nonostante il margine di fase sia molto grande, basta moltiplicare per un valore k piccolo per fare sì che il picco di risonanza superi l'asse 0dB. Questo si può vedere anche tracciando il diagramma di Nyquist di $L(s)$, in cui si vede che il picco di risonanza è molto vicino al punto -1 sull'asse reale (si veda Figura 17).

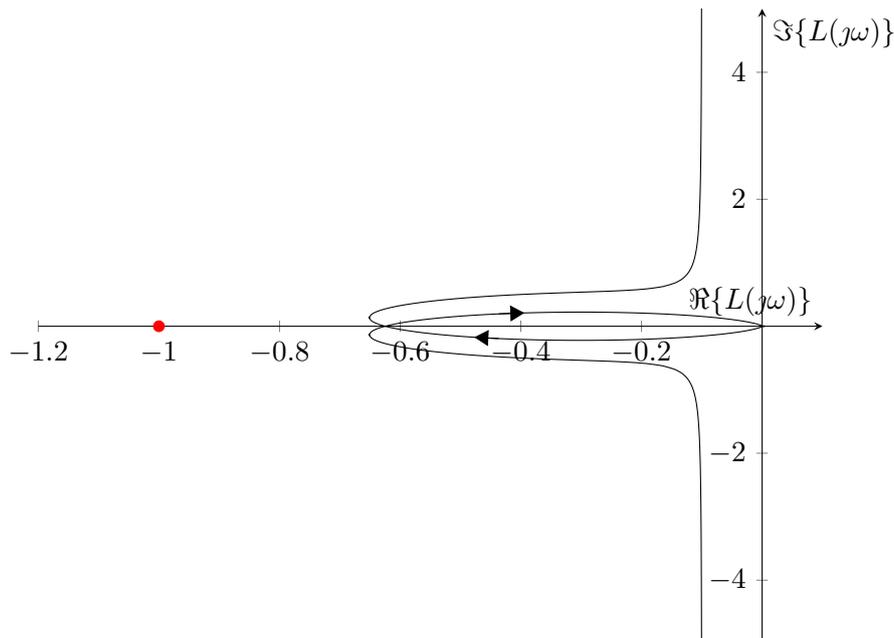


Figura 17: Diagramma di Nyquist della risposta in frequenza associata a $L(s)$.

3. La funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $y(t)$ è:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

Il modulo di $F(s)$ può essere approssimato come:

$$|F(j\omega)| \simeq \begin{cases} \frac{1}{|H(j\omega)|}, & \omega \ll \omega_c \\ |G(j\omega)|, & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

L'approssimazione del diagramma di Bode del modulo di $F(j\omega)$ è mostrato in Figura 18.

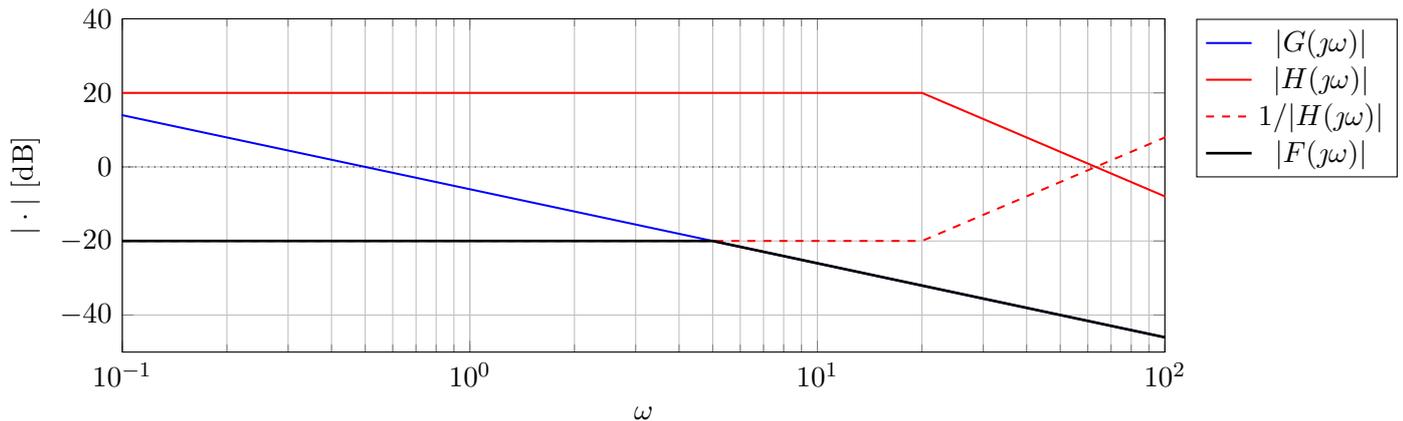


Figura 18: Diagramma di Bode del modulo risposta in frequenza associata a $F(s)$.

Dato che il margine di fase è ampio (maggiore di 75°), si può approssimare il sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ come:

$$F(s) \simeq \frac{0.1}{1 + s/\omega_c} = \frac{0.1}{1 + s/5}$$

per cui il tempo di assestamento sarà circa pari a $T_a = 1$. La risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ è mostrato in Figura 19.

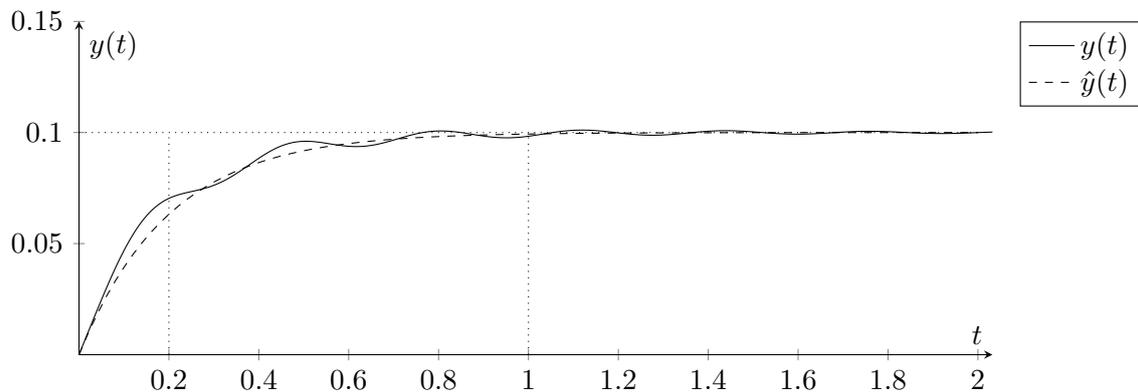


Figura 19: Risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$.

4. Moltiplicare o dividere per un fattore 10 $H(s)$ influenza l'ampiezza di $L(s)$ ma non la fase. In particolare, il modulo viene traslato in alto o in basso di 20dB nel caso in cui viene moltiplicato o diviso, rispettivamente. Traslare il modulo ha un effetto sulla pulsazione critica, per cui sul margine di fase. I diagrammi di Bode del modulo e della fase scalati sono mostrati in Figura 20.

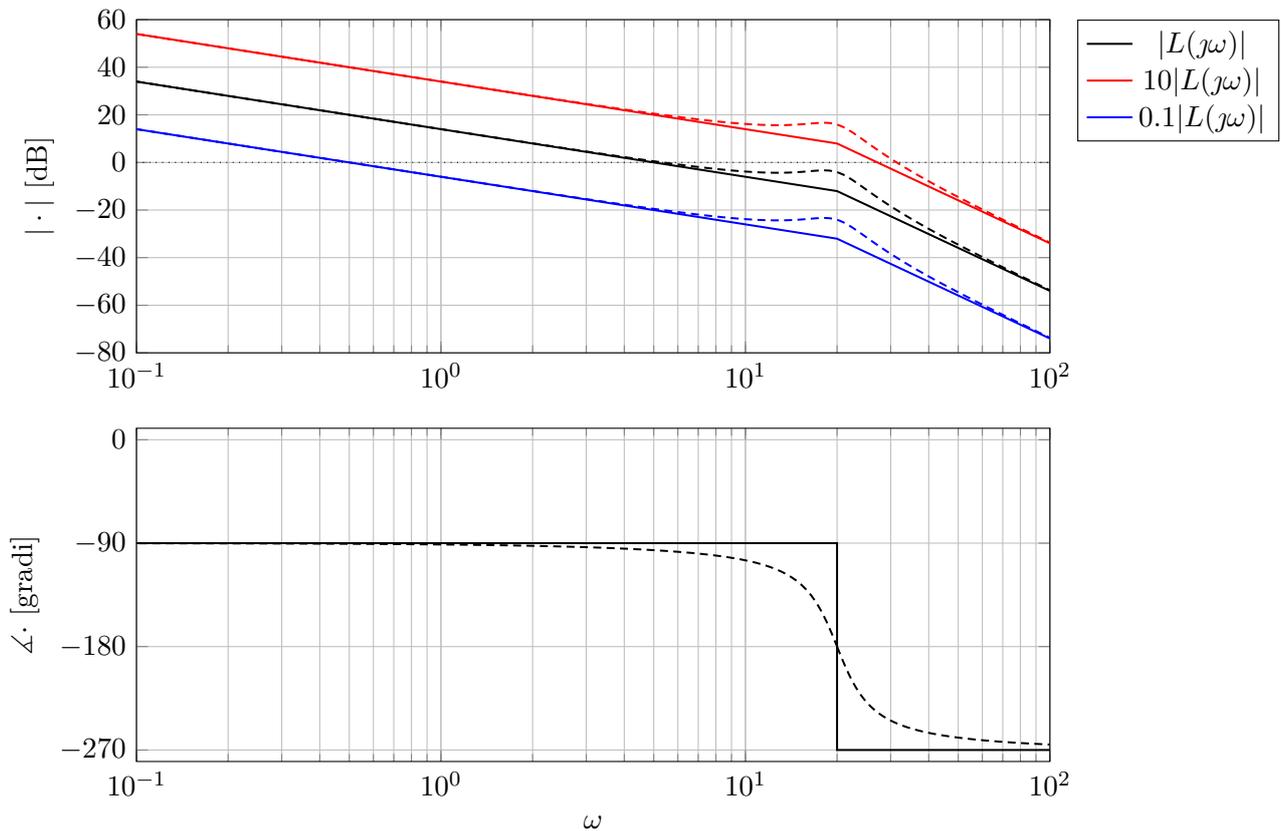


Figura 20: Diagramma di Bode della risposta in frequenza associata a $L(s)$.

Per quanto riguarda la stabilità, le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode sono soddisfatte. Dato che μ_L è sempre positivo, l'unico fattore decisivo per la stabilità è il margine di fase.

- Se si moltiplica per 10, la ω_c aumenta ed è circa uguale a 30. La fase scende velocemente a causa dei poli complessi coniugati verso i -270° , per cui si può concludere che il margine di fase è negativo e il sistema in anello chiuso è instabile.
- Tuttavia, se si divide $H(s)$ per 10, la ω_c diminuisce fino a 0.5 e il margine di fase aumenta. Dato che φ_m era già positivo, in questo caso è aumentato ed è più vicino a 90° .

Dal punto di vista della risposta allo scalino, quello che accade è che:

- Quando si moltiplica per 10, il sistema è instabile, per cui la risposta del sistema diverge.
- Quando si divide per 10, la funzione d'anello viene approssimata come:

$$|F(j\omega)| \simeq \begin{cases} \frac{10}{|H(j\omega)|}, & \omega \ll \omega_c \\ |G(j\omega)|, & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

e in particolare:

$$F(s) \simeq \frac{1}{1 + s/\omega_c} = \frac{1}{1 + s/0.5}$$

Il tempo di assestamento aumenta, avendo diminuito la ω_c , e in particolare $T_a = 5/0.5 = 10$. La risposta allo scalino del nuovo sistema è mostrata in Figura 21.

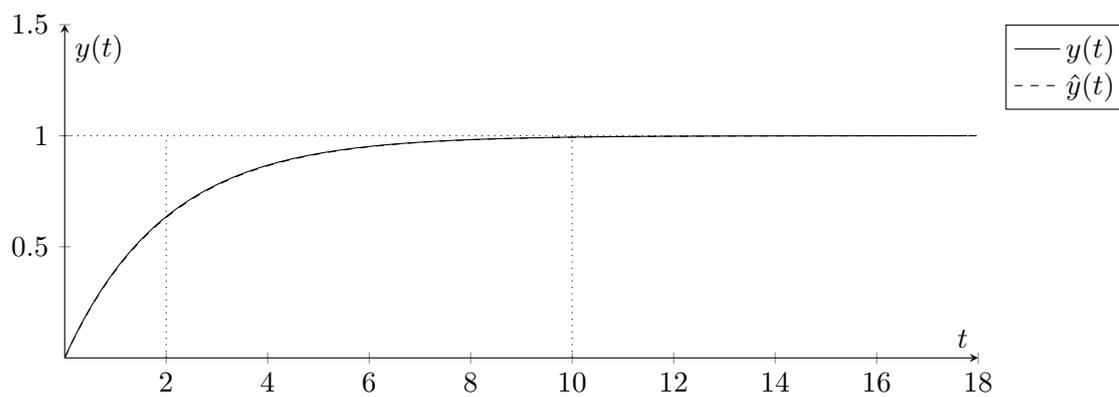


Figura 21: Risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ con $0.1H(s)$.