

Esercitazione 11: Sintesi del controllore

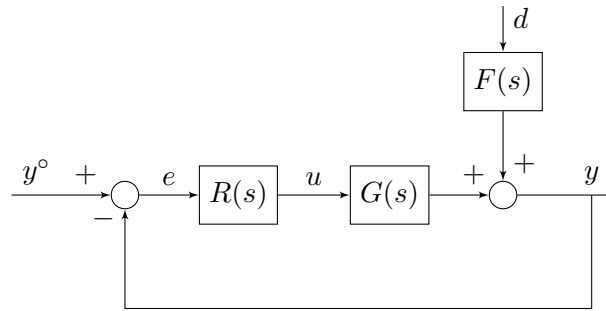
8 giugno 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Sistema a fase minima

Si consideri il seguente schema di controllo:



dove

$$G(s) = \frac{50}{(1 + 0.1s)(1 + s)(1 + 10s)} \quad F(s) = \frac{5}{1 + 0.01s}$$

Si vuole progettare $R(s)$ in modo tale che:

$$\begin{aligned} |e_\infty| &\leq 0.025, & y^\circ(t) &= 10 \operatorname{sca}(t) \\ & & d(t) &= \pm \operatorname{sca}(t) \\ \omega_c &\geq 1 \text{ rad/s} \\ \varphi_m &\geq 60^\circ \end{aligned}$$

Soluzione

Progetto statico

Fattorizzata $R(s)$ nella forma:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s), \quad R_2(0) = 1$$

Ci proponiamo di progettare $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}$ in modo da soddisfare la specifica sull'errore a transitorio esaurito.

Si osservi che l'errore è prodotto sia dal riferimento che dal disturbo. Studiamo separatamente il loro effetto, per poi considerare la situazione più sfavorevole in cui i due contributi all'errore si sommano in modulo.

- **Errore dovuto al riferimento:**

È possibile calcolare l'errore a transitorio esaurito con il **teorema del valore finale**.

In termini di trasformate:

$$E_{y^\circ}(s) = \frac{1}{1 + L(s)} Y^\circ(s)$$

Per l'applicazione del teorema del valore finale si assume di essere successivamente in grado di rendere il sistema asintoticamente stabile in anello chiuso. Se ciò non fosse possibile, tutte le conclusioni tratte nel progetto statico sarebbero nulle.

$$e_{y^\circ, \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s^{g_R}}{s^{g_R} + 50\mu_R} = \begin{cases} \frac{10}{1 + 50\mu_R} & g_R = 0 \\ 0 & g_R \geq 1 \end{cases}$$

Si osservi che il tipo della funzione di trasferimento d'anello coincide in questo caso con il tipo g_R del regolatore $R(s)$ dal momento che il processo $G(s)$ è a tipo zero.

- **Errore dovuto al disturbo:**

Applichiamo di nuovo il teorema del valore finale:

$$E_D(s) = \frac{-F(s)}{1+L(s)}D(s)$$

$$e_{d,\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{-5s}{1 + \frac{50\mu_R}{s^{g_R}}} \left(\pm \frac{1}{s} \right) \right] = \mp \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s^{g_R}}{s^{g_R} + 50\mu_R} = \begin{cases} \mp \frac{5}{1+50\mu_R} & g_R = 0 \\ 0 & g_R \geq 1 \end{cases}$$

Consideriamo dunque il caso pessimo in cui i due contributi di errore si sommano in modulo. Scegliamo il valore minimo (zero) del tipo g_R , in modo da non crearci difficoltà per il progetto dinamico.

$$|e_\infty| = |e_{y^\circ, \infty}| + |e_{d, \infty}| = \frac{10}{1+50\mu_R} + \frac{5}{1+50\mu_R} = \frac{15}{1+50\mu_R}$$

Si è implicitamente assunto $\mu_R > 0$, il che è motivato dal fatto che in sede di progetto dinamico si farà uso del criterio di Bode (che richiede guadagno d'anello positivo).

Imponiamo la specifica:

$$\frac{15}{1+50\mu_R} \leq \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$$

$$1+50\mu_R \geq 40 \cdot 15 = 600$$

$$\mu_R \geq \frac{599}{50} = 11.98 \simeq 12$$

Nella scelta del valore da attribuire a μ_R , occorre tener conto di un **margin di sicurezza** rispetto al valore minimo (12) determinato. Tale margine è necessario per far fronte alle inevitabili incertezze sull'entità dei disturbi e sui parametri del modello. D'altra parte μ_R non deve essere troppo elevato, per non compromettere la fattibilità del progetto dinamico.

Una soluzione di compromesso può essere $\mu_R = 20$. Il progetto statico è quindi concluso con la scelta: $R_1(s) = 20$.

Progetto dinamico

Scriviamo l'espressione della funzione di trasferimento d'anello, in cui esplicitiamo i due fattori di $R(s)$:

$$L(s) = R_1(s)R_2(s)G(s)$$

Conviene separare le funzioni di trasferimento note ($G(s), R_1(s)$) da quelle ancora da progettare ($R_2(s)$).

$$L(s) = R_2(s)L_1(s)$$

con

$$L_1(s) := R_1(s)G(s) = \frac{1000}{(1+0.1s)(1+s)(1+10s)}$$

Occorre a questo punto progettare $R_2(s)$ in modo tale che siano soddisfatte le specifiche dinamiche.

La prima cosa da fare è verificare che si è nel caso fortunato in cui le specifiche dinamiche sono soddisfatte semplicemente ponendo $R_2(s) = 1$. Per questo, occorre tracciare il diagramma di Bode di $|L_1(j\omega)|$:

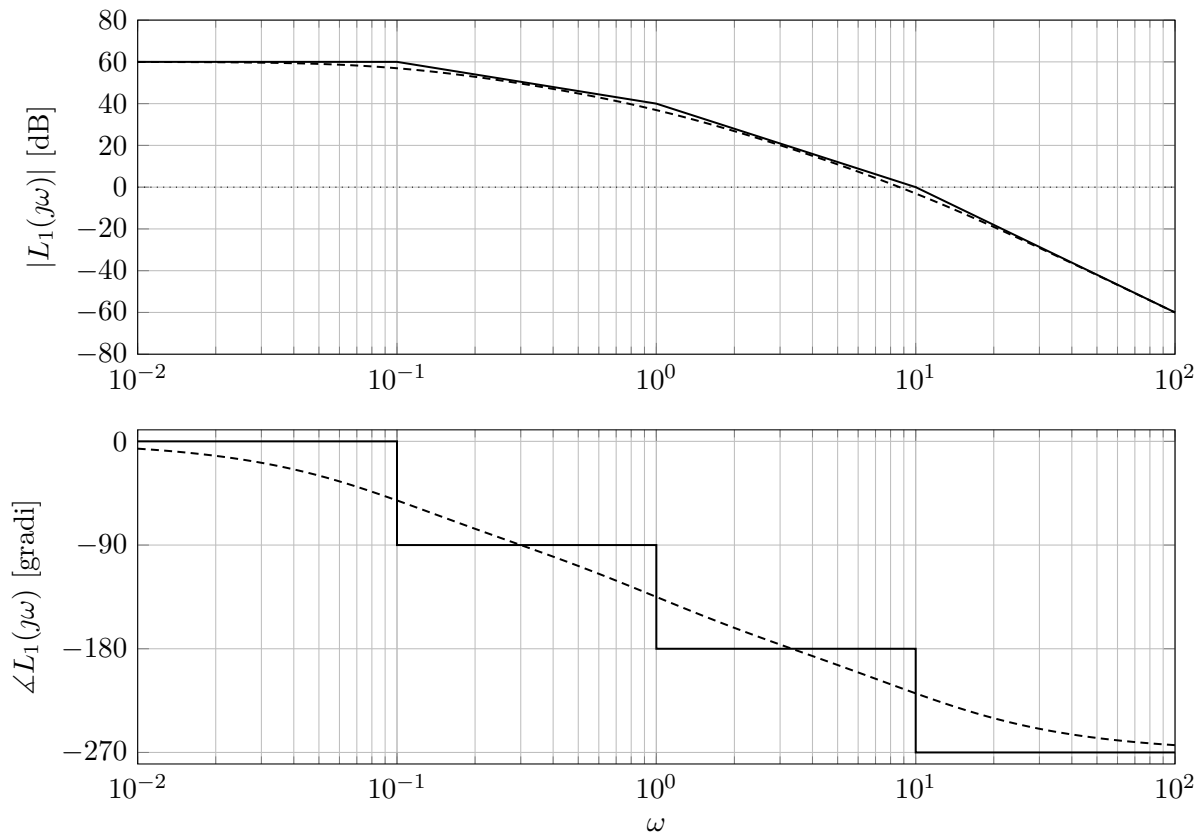


Figura 1: Diagramma di Bode del modulo e della fase di $L_1(s)$.

La pulsazione critica sarebbe già buona, ma il margine di fase risulta negativo ($\varphi_m = -38^\circ$) per cui il sistema in anello chiuso sarebbe addirittura instabile. Occorre allora senz'altro progettare $R_2(s)$.

Si ricorderà che per una funzione di trasferimento a guadagno positivo, con tutti gli zeri e i poli nel semipiano sinistro chiuso (sistema a fase minima), sussiste una relazione immediata tra diagramma di Bode della fase e quello del modulo, tanto che il primo si può ottenere dal secondo semplicemente moltiplicando la pendenza nei tratti per 90° .

È chiaro allora che se si fa in modo che il diagramma del modulo di $L(j\omega)$ tagli l'asse a 0 dB con un tratto sufficientemente ampio di **pendenza** -1 , la fase critica sarà non molto lontana dal suo valore asintotico (-90°), ossia il margine di fase sarà prossimo ai 90° . Ciò è tanto più vero quanto più lontano dalla pulsazione critica intervengono i cambiamenti di pendenza di $|L(j\omega)|$.

Da questa osservazione discende un metodo di progetto che si propone di individuare dapprima la funzione di trasferimento d'anello e quindi quella del regolatore, nota quella del processo. Il metodo si articola nelle seguenti fasi:

1. scelta una pulsazione uguale o superiore al minimo valore richiesto per ω_c , si traccia un **tratto di retta di pendenza** -1 che interseca l'asse a 0 dB per il valore di pulsazione individuato; tale tratto costituirà un pezzo del diagramma di $|L(j\omega)|$;
2. **a bassa frequenza** si fa in modo che la pendenza di $|L(j\omega)|$ coincida con quella di $|L_1(j\omega)|$. Se il progetto statico si è concluso con un limite inferiore sul guadagno del regolatore, il diagramma di $|L(j\omega)|$ dovrà coincidere o stare al di sopra di quello di $|L_1(j\omega)|$, per non compromettere il soddisfacimento della specifica statica;
3. **ad alta frequenza**, la pendenza di $|L(j\omega)|$ è dettata dall'esigenza che il regolatore nel suo complesso sia causale. Ne segue allora la condizione:

$$|\text{pendenza di } |L(j\omega)| | \geq |\text{pendenza di } |L_1(j\omega)| |$$

(infatti il modulo della pendenza di $|L(j\omega)|$ è l'eccesso di poli rispetto agli zeri). Se tutte le specifiche dinamiche sono rispettate, si ricava

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)}$$

L'applicazione del metodo all'esempio che stiamo trattando porta al risultato riportato di seguito:

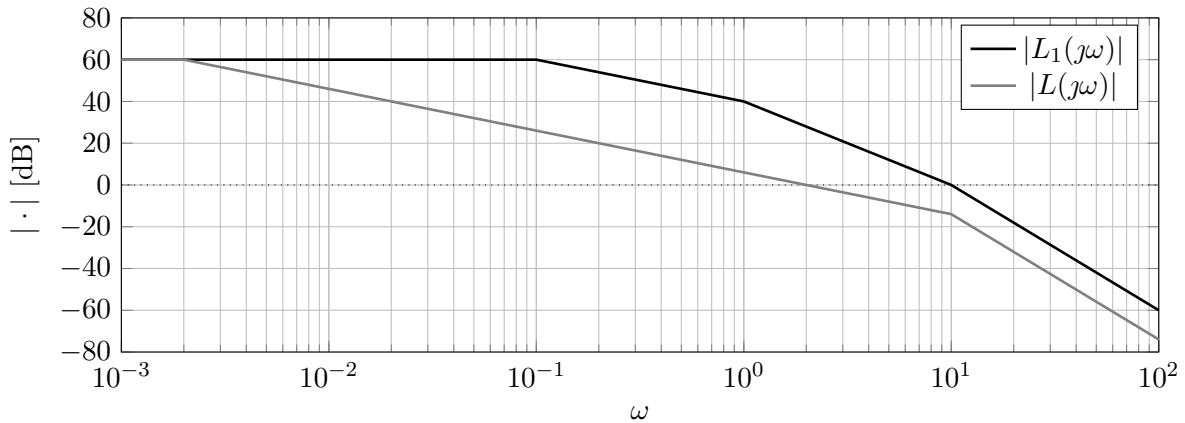


Figura 2: Diagramma di Bode del Modulo di $L(s)$ e $L_1(s)$.

Si è tagliato l'asse a 0 dB alla pulsazione $\omega_c = 2$. Si sono eliminati i poli di $L_1(s)$ alle pulsazioni 1 e 0.1, e si è ricongiunto il diagramma di $|L(j\omega)|$ con quello di $|L_1(j\omega)|$ a bassa frequenza alla pulsazione $\bar{\omega} = 0.002$ (la si ottiene graficamente).

In alta frequenza si è mantenuto il polo a 10 rad/s di $L_1(s)$. Si poteva eliminare anche questo polo, per esempio congiungendo anche in alta frequenza i diagrammi di $|L(j\omega)|$ e di $|L_1(j\omega)|$, ma ciò avrebbe comportato un inutile appesantimento del regolatore. La funzione di trasferimento d'anello progettata è quindi:

$$L(s) = \frac{1000}{\left(1 + \frac{s}{0.002}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)^2} = \frac{1000}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)^2}$$

Il **margin di fase** vale

$$\varphi_m = 180^\circ - |-\arctan(1000) - 2 \arctan(0.2)| = 68^\circ$$

ed è superiore al limite richiesto.

La funzione di trasferimento del regolatore (parte dinamica) si ottiene per confronto tra $L(s)$ e $L_1(s)$:

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{(1 + 10s)(1 + s)}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)}$$

La funzione di trasferimento complessiva del regolatore si ottiene dal prodotto di $R_1(s)$ e $R_2(s)$:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 20 \frac{(1 + 10s)(1 + s)}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)}$$

Il diagramma di Bode di $|R_2(j\omega)|$ è il seguente:

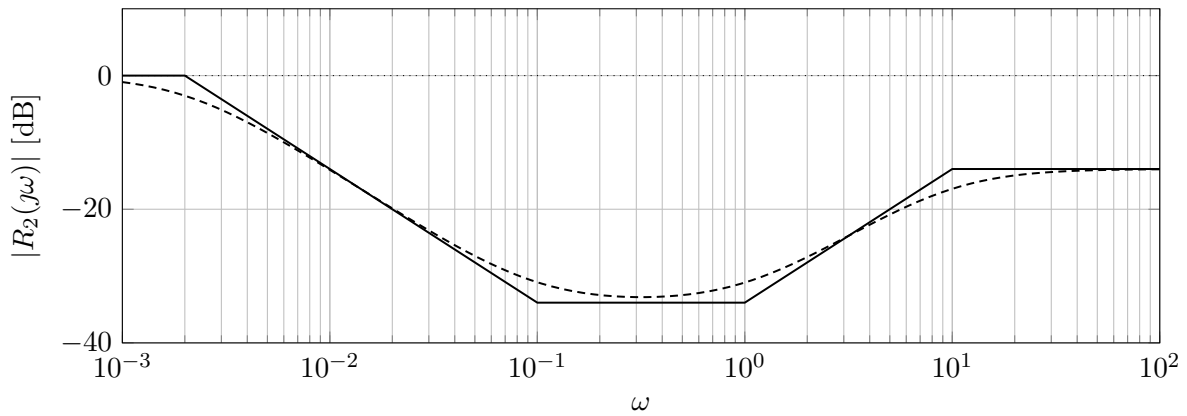


Figura 3: Diagramma di Bode del Modulo di $R_2(s)$.

Questo tipo di regolatore prende anche il nome di “**rete a sella**”

Progetto alternativo

Si consideri ora una **soluzione di progetto alternativa**, forse più immediata di quella proposta. Invece di fare in modo che il diagramma di $|L(j\omega)|$ stia sotto quello di $|L_1(j\omega)|$ in alta frequenza, si mantiene il primo polo in bassa frequenza di $|L_1(j\omega)|$ e si prolunga il tratto di pendenza -1 fino ad intercettare, alla pulsazione 100, l’asse a 0 dB, aggiungendo due poli una decade dopo:

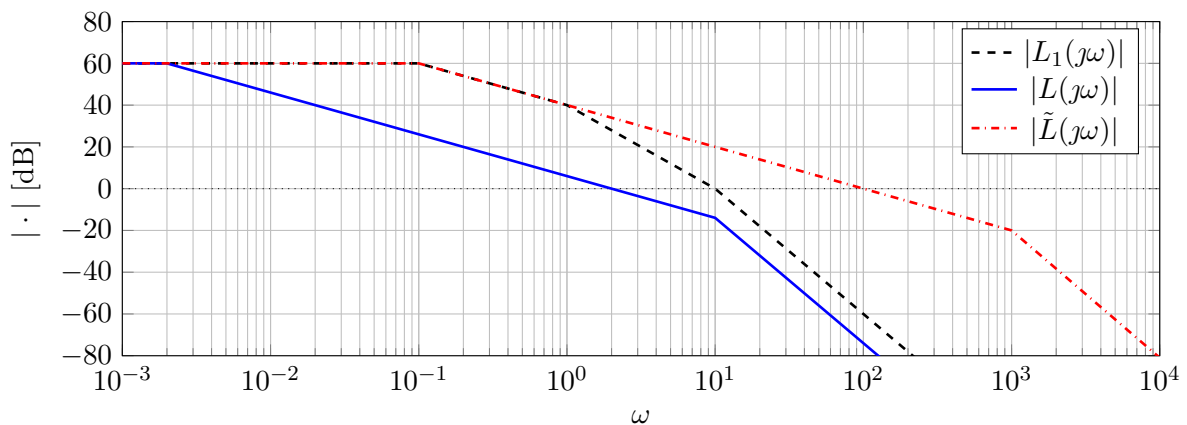
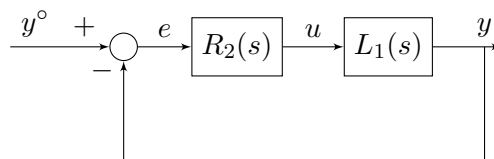


Figura 4: Diagramma di Bode del modulo di $L(s)$, $L_1(s)$ e di $\tilde{L}(s)$.

Chiamiamo $\tilde{L}(s)$ la nuova funzione di trasferimento d’anello. Tutte le specifiche sono soddisfatte, anzi, la pulsazione critica è aumentata di un fattore 50. Sembrerebbe allora che la soluzione $\tilde{L}(s)$ sia senz’altro preferibile alla soluzione $L(s)$.

Si consideri tuttavia la funzione di trasferimento tra il segnale di riferimento $y^\circ(t)$ e la “uscita” $u(t)$ del regolatore:



$$T(s) := \frac{U(s)}{Y^\circ(s)} = \frac{R_2(s)}{1 + R_2(s)L_1(s)}$$

A meno del fattore 20 (dovuto a $R_1(s)$) si tratta della funzione di trasferimento tra riferimento e variabile di controllo.

Volendo tracciare il diagramma del modulo di $T(s)$ ci si può rifare all'approssimazione:

$$|T(j\omega)| \simeq \begin{cases} |R_2(j\omega)|, & |R_2(j\omega)| < \frac{1}{|L_1(j\omega)|} \\ \frac{1}{|L_1(j\omega)|}, & |R_2(j\omega)| > \frac{1}{|L_1(j\omega)|} \end{cases}$$

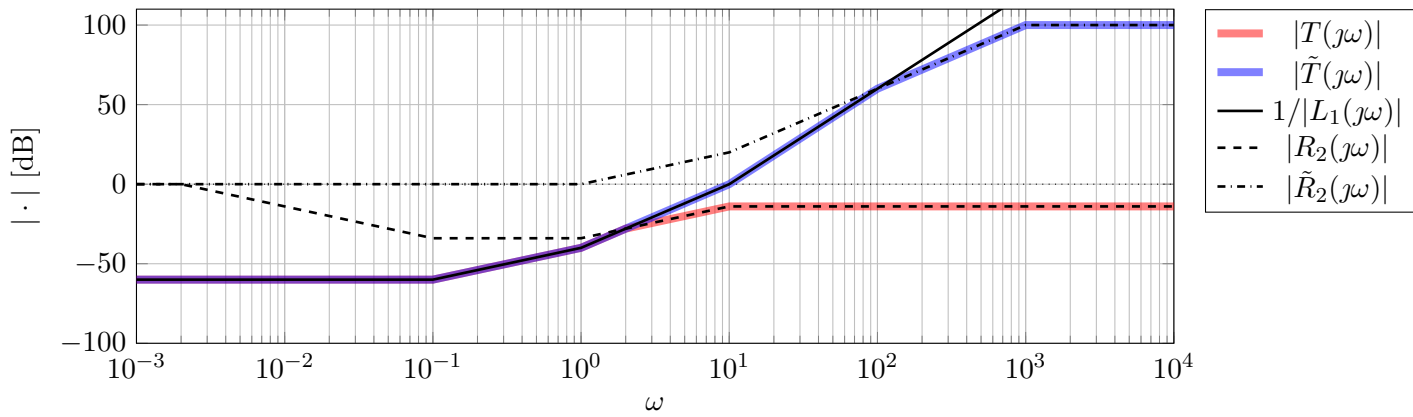
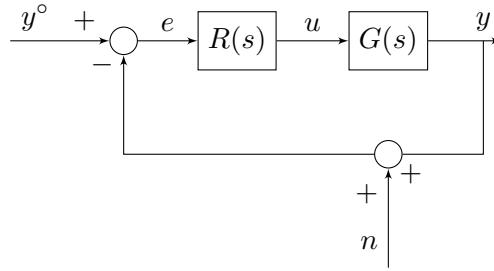


Figura 5: Diagramma di Bode del Modulo.

Si osserva che la funzione di trasferimento $T(s)$, con la scelta $\tilde{R}_2(s)$ del regolatore, ha un valore del modulo elevatissimo ad alta frequenza. Ciò comporta sollecitazioni violente e del tutto improponibili nella variabile di controllo a fronte di rapide variazioni del segnale di riferimento. Come conclusione, si può dire che un buon criterio di progetto potrebbe essere che il diagramma di $|L(j\omega)|$ in alta frequenza stia sotto quello di $|L_1(j\omega)|$, o comunque assume i valori più piccoli possibile.

2 Processo a fase non minima



Sia

$$G(s) = \frac{10(1-s)}{1+10s}$$

Specifiche:

$$|e_{y^o, \infty}| = 0, \quad y^o(t) = \text{sca}(t)$$

$$|e_{n, \infty}| \leq \frac{1}{10}, \quad n(t) = \sin(\omega_d t), \omega_d \geq 10 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c \geq 0.1 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m \geq 40^\circ$$

Soluzione

Progetto statico

Il progetto statico impone la presenza di un polo nell'origine per l'integratore:

$$R_1(s) = \frac{1}{s}$$

Quindi definiamo

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = 10 \frac{1-s}{s(1+10s)}$$

di cui possiamo tracciare il diagramma di Bode del modulo mostrato in Figura 6.

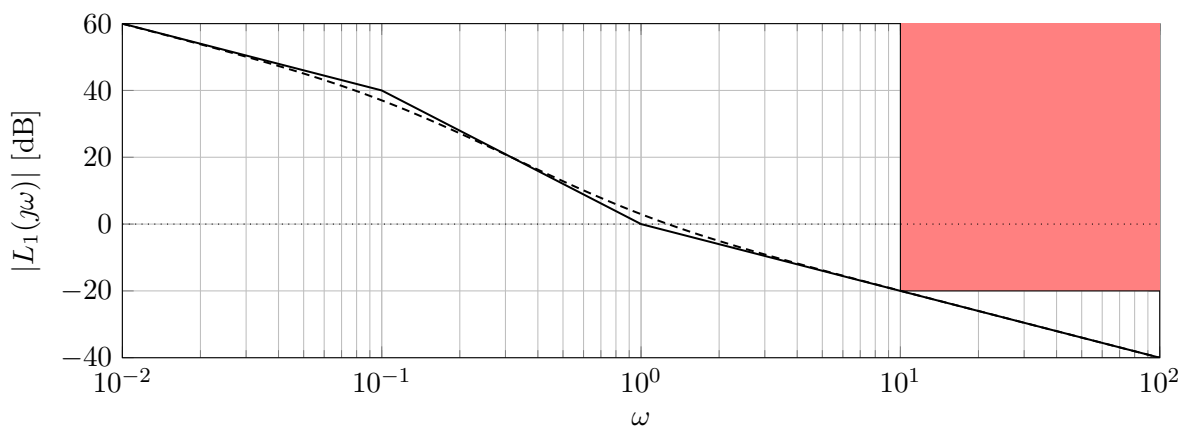


Figura 6: Diagramma di Bode del modulo di $L_1(s)$.

L'area rossa mostrata in figura, rappresenta il vincolo sull'attenuazione del disturbo $n(t)$ sull'errore. Infatti, il disturbo $n(t)$ deve essere attenuato di un fattore 10 e la funzione di trasferimento da $n(t)$ all'errore $e(t)$ è:

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Dato che $n(t)$ agisce ad alta frequenza (rispetto alla pulsazione critica), si può imporre un vincolo su $|L(j\omega)|$ tramite l'approssimazione:

$$\frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ |L(j\omega)|, & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} &\leq \frac{1}{10}, \quad \omega \geq 10 \\ |L(j\omega)| &\leq \frac{1}{10}, \quad \omega \geq 10 \\ |L(j\omega)|_{\text{dB}} &\leq -20\text{dB}, \quad \omega \geq 10 \end{aligned}$$

Progetto dinamico

Dal diagramma di Bode di Figura 6 si può ricavare che $\omega_c = 1$, per cui:

$$\varphi_c = \arctan(-1) - 90^\circ - \underbrace{\arctan(10)}_{\text{zero dx}} - 90^\circ - 84^\circ = -219^\circ \Rightarrow \varphi_m = -39^\circ < 0$$

Nonostante il diagramma di Bode del modulo tagli l'asse a 0 dB con un tratto a pendenza -1 , il sistema in anello chiuso è **instabile**. Ciò è dovuto al forte **contributo di fase negativo** dovuto allo zero a parte reale positiva posto prima della pulsazione critica. Si osservi che non è possibile cancellare tale zero con un polo nel regolatore perché il sistema rimarrebbe comunque instabile.

L'unico provvedimento che si può prendere in questo caso è fare in modo che la pulsazione critica sia inferiore alla pulsazione dello zero, per cui, il suo contributo diventi meno pesante. Si adotterà, pertanto, la soluzione riportata in Figura 7.

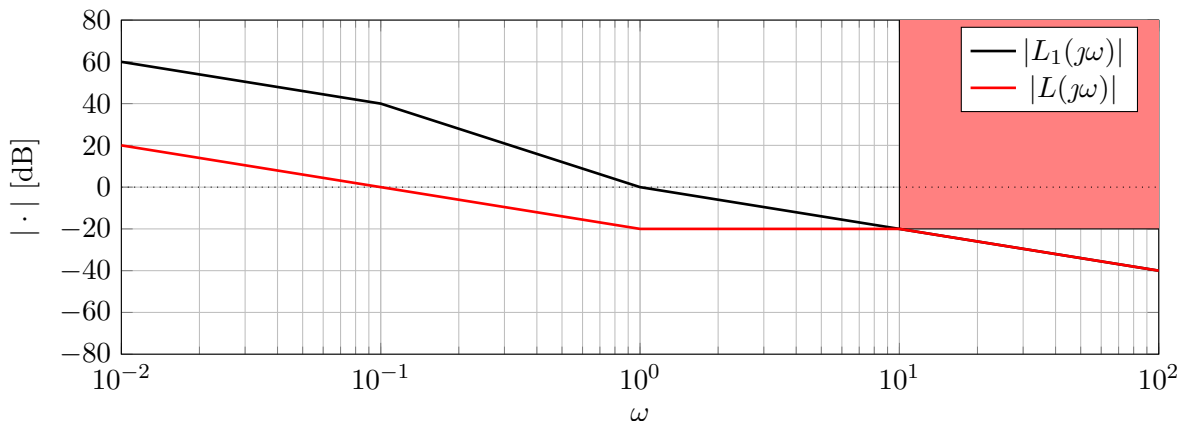


Figura 7: Diagramma di Bode del modulo di $L_1(s)$ e di $L(s)$.

in cui possiamo ricavare che $\omega_c = 0.1$

$$\varphi_c = \arctan(-0.1) - 90^\circ - \arctan(0.01) = -96.3^\circ, \Rightarrow \varphi_m = 83.7^\circ > 0$$

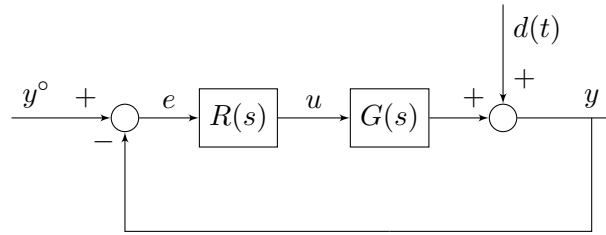
Si osservi che, non essendoci vincoli sul guadagno del regolatore derivanti dal progetto statico, possiamo in questo caso derogare la regola di accordare $L(j\omega)$ con $L_1(j\omega)$ in bassa frequenza (otterremo $R_2(0) < 1$). Risultata:

$$L(s) = \frac{0.1}{s} \frac{1-s}{1+\frac{s}{10}} = \frac{0.1}{s} \frac{1-s}{1+0.1s}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} R_2(s) &= \frac{L(s)}{L_1(s)} = 0.01 \frac{1+10s}{1+0.1s} \\ R(s) &= \frac{0.01}{s} \frac{1+10s}{1+0.1s} \end{aligned}$$

3 Sistema con ritardo



con

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{(1+s)(1+10s)}$$

Specifiche:

$$\begin{aligned} |e_\infty| &< 0.15, & d(t) &= \pm \text{sca}(t) \\ \omega_c &\geq 0.3 \text{ rad/s} \\ \varphi_m &\geq 40^\circ \end{aligned}$$

Soluzione

Progetto statico

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)} D(s)$$

sia $R(s) = R_1(s)R_2(s)$, con

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}} \quad R_2(0) = 1$$

possiamo dire che:

$$e_{d,\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + \frac{\mu_R}{s^{g_R}}} \left(\pm \frac{1}{s} \right) \right] = \pm \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_R}}{s^{g_R} + \mu_R} = \begin{cases} \pm \frac{1}{1 + \mu_R} & g_R = 0 \\ 0 & g_R \geq 1 \end{cases}$$

Si osservi che il ritardo non gioca alcun ruolo nel progetto statico. Scegliamo, quindi, $g_R = 0$ e imponiamo la specifica:

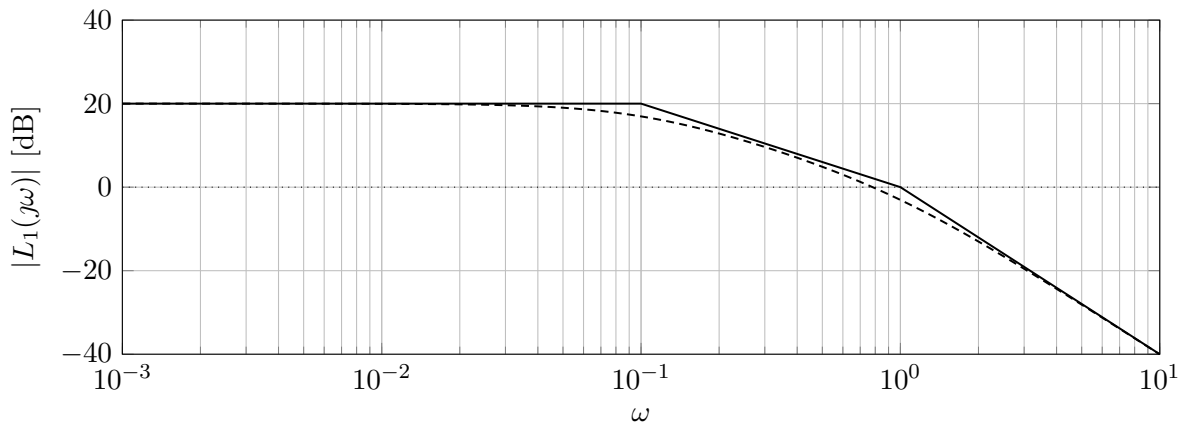
$$\frac{1}{1 + \mu_R} < 0.15 \quad 1 + \mu_R > 6.67 \quad \mu_R > 5.67$$

Scegliamo $\mu_R = 10 \Rightarrow R_1(s) = 10$.

Progetto dinamico

Poniamo

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{10e^{-s}}{(1+s)(1+10s)}$$

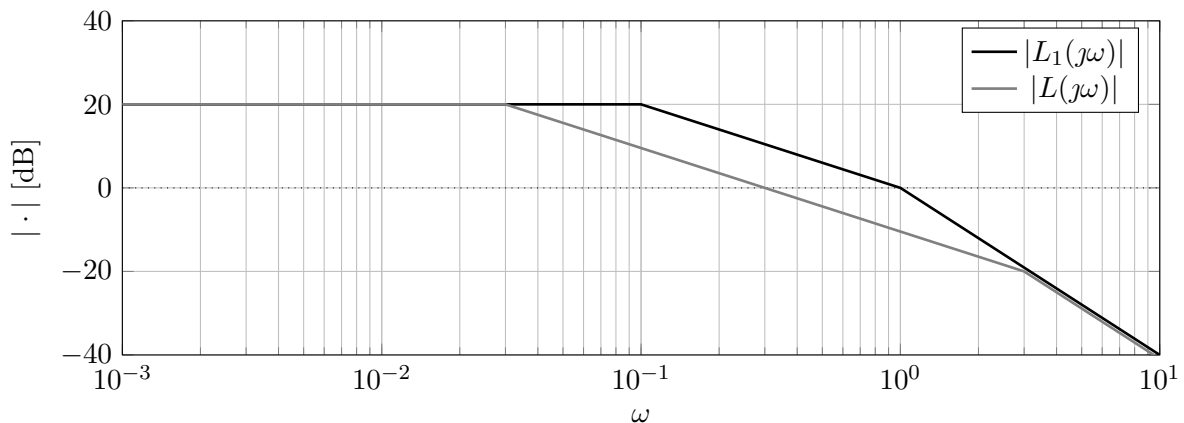
Figura 8: Diagramma di Bode del modulo di $L_1(s)$.

che ha una pulsazione di taglio $\omega_c = 1$:

$$\varphi_c = -84^\circ - 45^\circ - \underbrace{\omega_c \tau \frac{180}{\pi}}_{\text{contributo ritardo}} = -84^\circ - 45^\circ - 57^\circ = -186^\circ \Rightarrow \varphi_m = -6^\circ < 0$$

A causa della presenza del ritardo il sistema sarebbe instabile.

Progettiamo $L(s)$ al solito modo, ottenendo:

Figura 9: Diagramma di Bode del modulo di $L_1(s)$ e di $L(s)$.

in cui $\omega_c = 0.3$:

$$\varphi_c = -84^\circ - 6^\circ - 0.3 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -90^\circ - 0.3 \cdot 57^\circ = -107^\circ \Rightarrow \varphi_m = 73^\circ > 0$$

Si ha quindi che

$$L(s) = 10 \frac{e^{-s}}{\left(1 + \frac{s}{0.03}\right) \left(1 + \frac{s}{3}\right)} \quad R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{(1+s)(1+10s)}{(1+100/3s)(1+s/3)}$$

e infine

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 10 \frac{(1+s)(1+10s)}{(1+100/3s)(1+s/3)}$$

Una alternativa che permette di ottenere una ω_c superiore continuando a soddisfare le specifiche di progetto è la seguente, in cui si ottiene $\tilde{L}(s)$.

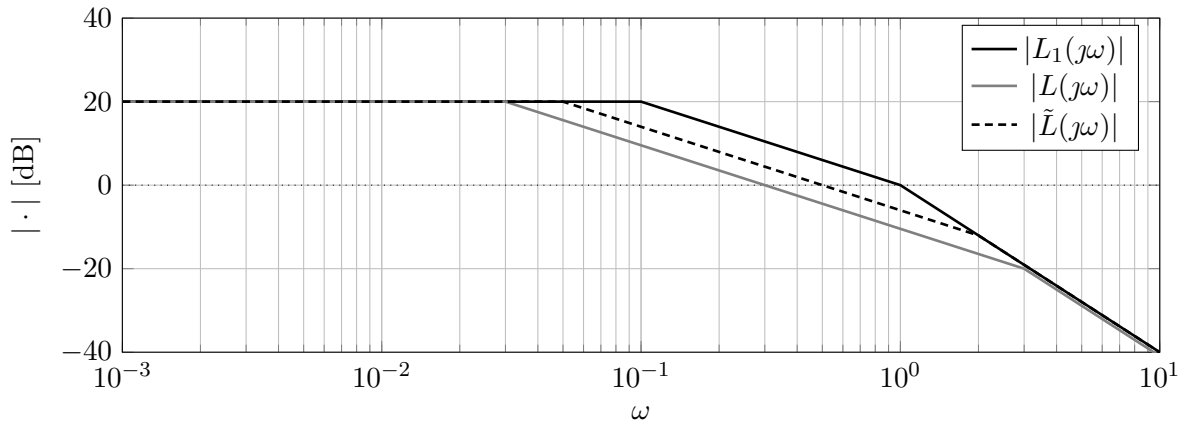


Figura 10: Diagramma di Bode del modulo di $L_1(s)$, $L(s)$ e $\tilde{L}(s)$.

In questo caso si può imporre che la $\omega_c = 0.5$, inserendo un polo in $\omega = 0.05$. Per trovare il secondo polo, possiamo ricongiungere il diagramma di Bode del modulo di $\tilde{L}(s)$ con quello di $L_1(s)$, mettendo, ad esempio, a sistema le due rette

$$\begin{cases} y - 20 = -20 (\log(\omega) - \log(0.05)) \\ y - 0 = -40 (\log(\omega) - 0) \end{cases} \Rightarrow -40 \log(\omega) = -20 \log(\omega) + 20 \log(0.05) + 20$$

$$-20 \log(\omega) = 20 \log(0.05) + 20 \Rightarrow \omega = 10^{-\log(0.05)-1} = 2$$

Da questo ricaviamo che

$$\tilde{L}(s) = 10 \frac{e^{-s}}{(1 + s/0.05)(1 + s/2)} = 10 \frac{e^{-s}}{(1 + 20s)(1 + 0.5s)}$$

il cui margine di fase è dato da

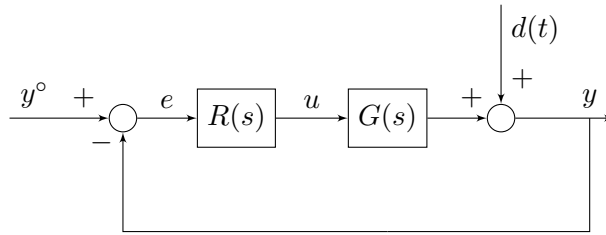
$$\varphi_m = 180 - \left| -\omega_c \frac{180}{\pi} - \arctan(20\omega_c) - \arctan(0.5\omega_c) \right| = 180 - | -127^\circ | = 53^\circ > 0$$

Si può quindi calcolare il regolatore come

$$\tilde{R}(s) = \frac{\tilde{L}(s)}{G(s)} = 10 \frac{e^{-s}}{(1 + 20s)(1 + 0.5s)} \frac{(1 + s)(1 + 10s)}{e^{-s}} = 10 \frac{(1 + s)(1 + 10s)}{(1 + 20s)(1 + 0.5s)}$$

4 Disturbi Fourier trasformabili

Per il seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G(s) = \frac{k}{(1+s)(1+0.2s)} \quad k = 2 \pm 0.2$$

Si progetti il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

$$\begin{aligned} |e_\infty| < 0.2, \quad y^\circ(t) &= \text{ram}(t) \\ d(t) &= \sin(\omega_d t), \omega_d \leq 0.2 \text{ rad/s} \\ \omega_c &\geq 1 \text{ rad/s} \\ \varphi_m &\geq 40^\circ \end{aligned}$$

Soluzione

Progetto statico

L'errore dovuto al disturbo non potrà essere valutato con il teorema del valore finale (la trasformata del disturbo ha poli immaginari). D'altra parte, se il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, si potrà utilizzare il **teorema della risposta in frequenza** per determinare l'espressione valida a transitorio esaurito dell'errore forzato dal disturbo sinusoidale.

In virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, avremo:

$$e_\infty(t) = e_{y^\circ, \infty} + e_{d, \infty}(t)$$

dove $e_{y^\circ, \infty}$ è l'errore forzato dal riferimento a rampa, $e_{d, \infty}(t)$ dal disturbo sinusoidale.

Per quanto detto prima, si ha:

$$e_{d, \infty}(t) = |S(j\omega_d)| \sin(\omega_d t + \angle S(j\omega_d))$$

dove $\omega_d = 0.2$, e la funzione di trasferimento dal disturbo all'errore è

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -S(s) = -\frac{1}{1+L(s)}$$

Una maggiorazione dell'errore (in modulo) si ottiene come segue:

$$|e_\infty(t)| = |e_{y^\circ, \infty} + e_{d, \infty}(t)| \leq |e_{y^\circ, \infty}| + |e_{d, \infty}(t)| \leq |e_{y^\circ, \infty}| + |S(j\omega_d)| < 0.2$$

Tra i vari modi in cui si può suddividere l'errore tra i due contributi, il più ovvio è l'equipartizione:

$$\begin{cases} |e_{y^\circ, \infty}| < 0.1 \\ |S(j\omega_d)| < 0.1 \end{cases}$$

- **Errore dovuto al riferimento:**

$$\begin{aligned} |e_{y^\circ, \infty}| &= \lim_{s \rightarrow 0} s E_{y^\circ}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+L(s)} Y^\circ(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{\mu_L}{s^{g_L}}} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_L-1}}{s^{g_L} + \mu_L} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_R-1}}{s^{g_R} + \mu_R k} \end{aligned}$$

Quindi, per ottenere una precisione statica finita si impone che $g_R = 1$, ottenendo:

$$|e_{y^o, \infty}| = \frac{1}{\mu_R k}$$

Il caso peggiore si ha per $k = 1.8$

$$|e_{y^o, \infty}| = \frac{1}{1.8\mu_R} < 0.1 \quad \mu_R > \frac{10}{1.8} = \frac{50}{9} \simeq 5.56$$

In ogni caso, per sicurezza, si può scegliere come valore di $\mu_R = 10$.

Il regolatore risultante da questa parte del progetto statico è dunque

$$R_1(s) = \frac{10}{s}$$

• **Errore dovuto a d:**

La condizione $|S(j\omega_d)| < 0.1$ si traduce nella seguente:

$$\left| \frac{1}{1 + L(j\omega_d)} \right| < 0.1$$

Supposto che per tutte le pulsazioni $\omega_d \leq 0.2$ il modulo di $L(s)$ sia decisamente maggiore di 1 (dato che $\omega_d < \omega_c$ richiesta), si potrà approssimare la precedente relazione con:

$$\frac{1}{|L(j\omega_d)|}$$

ossia

$$|L(j\omega_d)| > 10 \quad |L(j\omega_d)|_{\text{dB}} > 20$$

Pertanto alla pulsazione ω_d il modulo di $L(s)$ dovrà essere superiore ai 20 dB. La specifica statica comporta quindi in questo caso un **vincolo su L(s)** che il progetto dinamico dovrà rispettare.

Progetto dinamico

Posto $L_1(s) := R_1(s)G(s) = \frac{20}{s(1+s)(1+0.2s)}$, si traccia il diagramma di Bode di $|L_1(j\omega)|$.

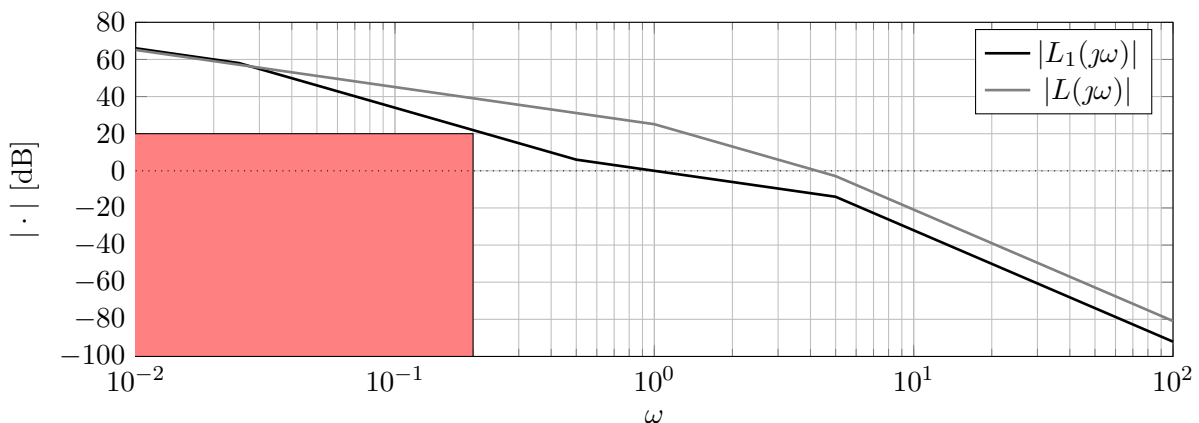


Figura 11: Diagramma di Bode del modulo di $L_1(s)$ e di $L(s)$.

La pulsazione critica è $\omega_c \simeq 4$, quindi la $\varphi_c = -90^\circ - \arctan(4) - \arctan(0.2 \cdot 4) \simeq -205^\circ$, da cui è evidente che $\varphi_m < 0$, quindi $L_1(s)$ non soddisfa le specifiche dinamiche.

Si può progettare $L(s)$ imponendo il taglio dell'asse a 0 dB alla pulsazione $\omega_c = 1$, introducendo un cambiamento di pendenza alla pulsazione 0.5 in modo da rispettare il vincolo a ω_d , e ricongiungendo

in bassa frequenza i diagrammi di $L(s)$ e $L_1(s)$. In alta frequenza si potrà introdurre un polo alla pulsazione 5. Risulta:

$$L(s) = \frac{20}{s} \cdot \frac{1 + 2s}{\left(1 + \frac{s}{0.025}\right)(1 + 0.2s)^2}, \quad \omega_c = 1$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - \arctan(40) + \arctan(2) - 2 \arctan(0.2)|$$

$$= 180^\circ - |-90^\circ - 88.5^\circ + 63.4^\circ - 2 \cdot 11.3^\circ|$$

$$= 42.3^\circ$$

$$R(s) = R_1(s) \cdot R_2(s) = R_1(s) \cdot \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{10}{s} \cdot \frac{(1 + 2s)(1 + s)}{(1 + 40s)(1 + 0.2s)}$$

Un'altra alternativa è quella di procedere in maniera più analitica, ottenendo $\tilde{L}(s)$ come segue:

1. Imponiamo che $|\tilde{L}(j0.2)| = 20$ dB e che abbia pendenza -2 , e scriviamo la retta corrispondente

$$y - 20 = -40 (\log(\omega) - \log(0.2))$$

2. Scriviamo la retta dell'asintoto del diagramma di Bode di $|\tilde{L}(j\omega)|$

$$y - 26 = -20 (\log(\omega) - 0).$$

3. Troviamo il punto in cui si intersecano (che corrisponderà alla pulsazione della prima singolarità)

$$\begin{cases} y = -40 \log(\omega) + 40 \log(0.2) + 20 \\ y = -20 \log(\omega) + 26 \end{cases} \Rightarrow 20 \log(\omega) = 40 \log(0.2) - 6$$

$$\omega = 10^{2 \log(0.2) - 0.3} \simeq 0.02 \text{ rad/s}$$

4. A questo punto scriviamo la retta che passa per $\omega_c = 1$ rad/s con pendenza -1 e la intersechiamo ancora con la retta che passa per 20 dB a 0.2 rad/s

$$\begin{cases} y = -20 \log(\omega) \\ y = -40 \log(\omega) + 40 \log(0.2) + 20 \end{cases} \Rightarrow 20 \log(\omega) = 40 \log(0.2) + 20$$

$$\omega = 10^{2 \log(0.2) + 1} = 0.4 \text{ rad/s}$$

5. Dato che

$$|\text{pendenza di } |\tilde{L}(j\omega)| | \geq |\text{pendenza di } |L_1(j\omega)| | - g_R$$

nel nostro caso possiamo dire che

$$|\text{pendenza di } |\tilde{L}(j\omega)| | \geq |-3| - 1 = 2$$

possiamo non aggiungere un ulteriore polo per far coincidere le pendenze in alta frequenza, ottenendo

$$\tilde{L}(s) = \frac{20}{s} \cdot \frac{(1 + s/0.4)}{(1 + s/0.02)(1 + s/5)}$$

ottenendo un margine di fase

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ + \arctan(10/4) - \arctan(100/2) - \arctan(1/5)| = 180^\circ - |-122^\circ| \simeq 58^\circ$$

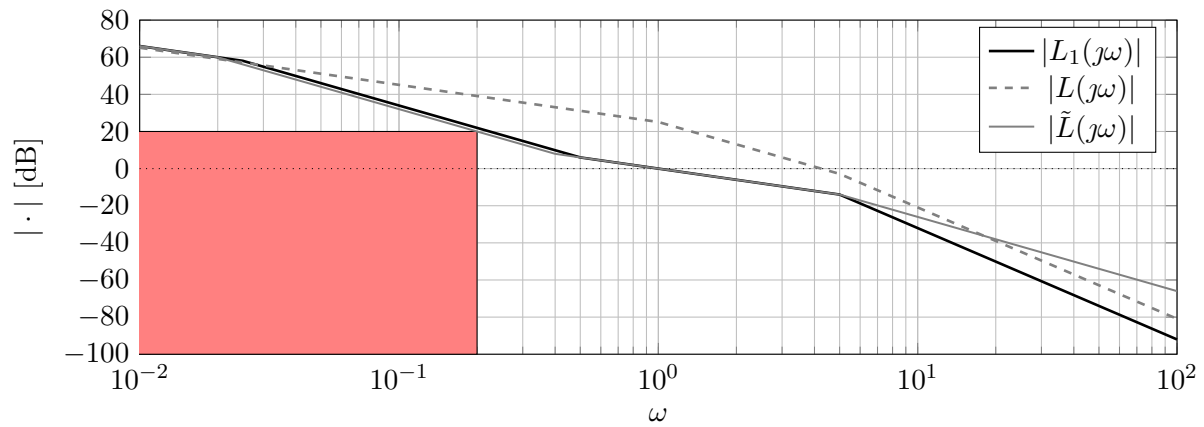


Figura 12: Diagramma di Bode del modulo di $L_1(s)$, $L(s)$ e $\tilde{L}(s)$.

6. Ricavo il regolatore come

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{20}{s} \cdot \frac{(1 + s/0.4)}{(1 + s/0.02)(1 + s/5)} \frac{(1 + s)(1 + s/5)}{2} = \frac{10}{s} \frac{(1 + s/0.4)(1 + s)}{(1 + s/0.02)}$$