Esercitazione 12: Ripasso

15 giugno 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Sistema non lineare

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_1(t) - x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(x_2(t)) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

dove il grafico della funzione periodica $f(\cdot)$ è mostrato in Figura 1.

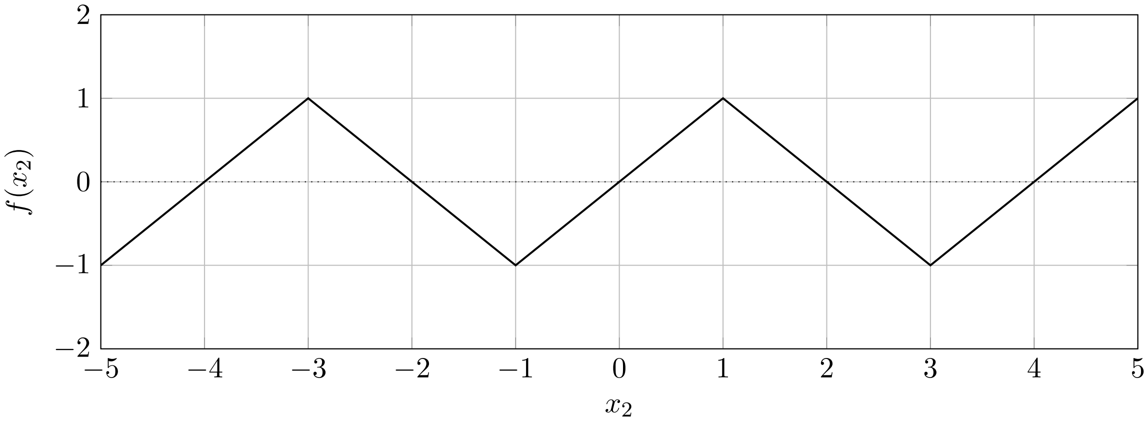


Figura 1: Grafico della funzione periodica $f(\cdot)$.

1. Si risponda alle seguenti domande, giustificando brevemente le risposte:
   (a) Il sistema è dinamico?
   (b) Il sistema è lineare?
   (c) Qual è l'ordine del sistema?
   (d) Il sistema è MIMO?
   (e) Il sistema è strettamente proprio?
2. Si calcolino i punti di equilibrio e si analizzino le proprietà di stabilità degli stessi nei seguenti tre casi:
   (a) $u(t) = \overline{u} = 0$;
   (b) $u(t) = \overline{u} = 1$;
   (c) $u(t) = \overline{u} = 2$.
3. Si consideri il caso di $u(t) = 0$. Si calcoli analiticamente il movimento dello stato e dell'uscita del sistema data la condizione iniziale

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2 Schemi a blocchi

Si consideri lo schema a blocchi in Figura 2

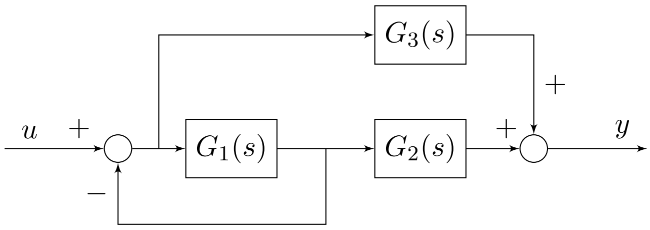


Figura 2: Schema a blocchi.

dove $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$ sono funzioni di trasferimento di sistemi di ordine 1.

1. Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema complessivo in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

2. Posti:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+3}, \quad G_2(s) = \frac{s+4}{s+0.1}, \quad G_3(s) = -\frac{1}{s+3},$$

verificare che:

$$H(s) = \frac{3.9}{(s+0.1)(s+4)}$$

e studiare le prioprietà di stabilità del sistema avente ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

3. Calcolare la risposta di regime (a transitorio esaurito) del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) = e^{-2t} + 4$, $t \geq 0$.

3 Sistema in anello aperto

Si consideri il seguente sistema in spazio di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -20x_1(t) + 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

1. Si risponda alle seguenti domande, giustificando le risposte:
   (a) Si calcoli la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.
   (b) Si individuino poli, zeri e guadagno della funzione di trasferimento $G(s)$.
   (c) Il sistema è asintoticamente stabile?
   (d) Il sistema è a fase minima?

2. Si traccino i diagrammi di Bode (del modulo e della fase) di $G(s)$.

3. Si calcoli l'espressione analitica della risposta forzata dell'uscita a fronte di un ingresso $u(t) = e^{\alpha t}\,\mathrm{sca}(t)$ nei casi:
   (a) $\alpha = 0$
   (b) $\alpha = -10$

4. Si calcoli l'espressione analitica della risposta libera dell'uscita del sistema avente condizioni iniziali:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 Sistema a fase non minima

Si consideri lo schema di controllo rappresentato in Figura 3

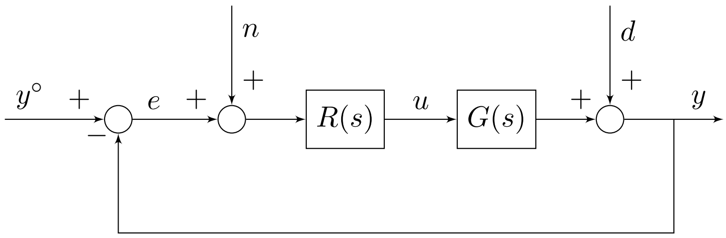


Figura 3: Schema di controllo.

dove

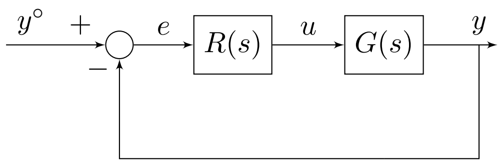
$$G(s) = \frac{1 - 0.1s}{(1 + 0.1s)(1 + s)(1 + 10s)},$$

è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine, da controllare.

1. Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore di ordine minimo in modo tale che
   (a) L'errore a transitorio esaurito e_∞ soddisfi la limitazione $|e_\infty| \leq 0.001$ quando $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$, $n(t) = 0$ e $d(t) = 0$.
   (b) L'errore a transitorio esaurito e_∞ soddisfi la limitazione $|e_\infty| \leq 0.1$ quando $y^\circ(t) = 0$, $n(t) = \sin(\omega_n t)$ e $d(t) = 0$, con $\omega_n \geq 10^2$.
   (c) L'errore a transitorio esaurito e_∞ soddisfi la limitazione $|e_\infty| \leq 0.1$ quando $y^\circ(t) = 0$, $n(t) = 0$ e $d(t) = \sin(\omega_d t)$, con $\omega_d \leq 0.1$.
   (d) Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°.
   (e) La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 3.
2. Si determini la funzione di trasferimento $R^*(z)$ del regolatore ottenuto discretizzando $R(s)$ con il metodo di Eulero implicito e con il valore di $T_s = 0.1$, valutando la variazione di margine di fase dovuta alla discretizzazione.
3. Scrivere la corrispondente legge di controllo a tempo discreto.

5 Integratore nel processo

Si consideri il seguente schema di controllo:



dove

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$$

Si progetti $R(s)$ in modo tale che:

$$|e_\infty| = 0 \quad y^\circ = \text{sca}(t)$$
$$\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$$
$$\varphi_m \geq 50^\circ$$