

# **Esercitazione 12: Ripasso**

15 giugno 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos  
alessandro.papadopoulos@polimi.it

**Fondamenti di Automatica**  
Prof. M. Farina

## 1 Sistema non lineare

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_1(t) - x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(x_2(t)) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

dove il grafico della funzione periodica  $f(\cdot)$  è mostrato in Figura 1.

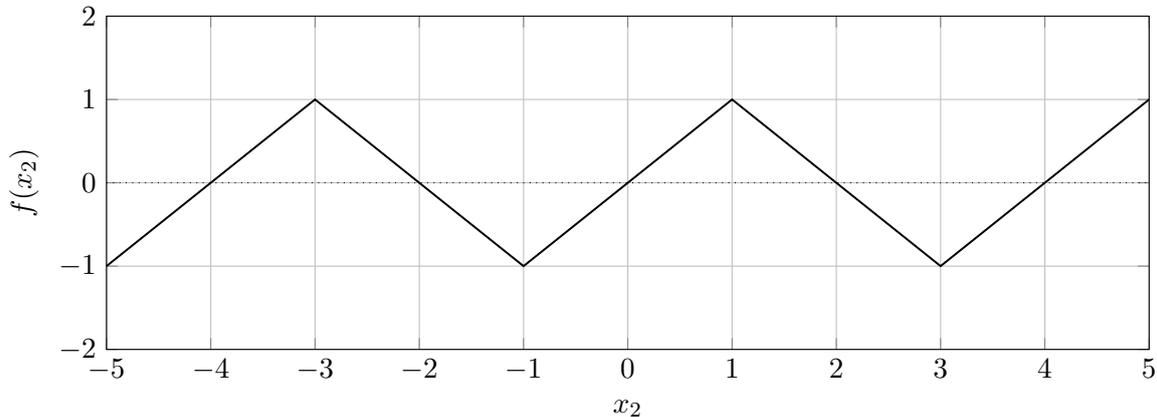


Figura 1: Grafico della funzione periodica  $f(\cdot)$ .

1. Si risponda alle seguenti domande, giustificando brevemente le risposte:
  - (a) Il sistema è dinamico?
  - (b) Il sistema è lineare?
  - (c) Qual è l'ordine del sistema?
  - (d) Il sistema è MIMO?
  - (e) Il sistema è strettamente proprio?
2. Si calcolino i punti di equilibrio e si analizzino le proprietà di stabilità degli stessi nei seguenti tre casi:
  - (a)  $u(t) = \bar{u} = 0$ ;
  - (b)  $u(t) = \bar{u} = 1$ ;
  - (c)  $u(t) = \bar{u} = 2$ .
3. Si consideri il caso di  $u(t) = 0$ . Si calcoli analiticamente il movimento dello stato e dell'uscita del sistema data la condizione iniziale

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

### Soluzione

1. Rispondiamo per punti.
  - (a) Il sistema è dinamico, dato che l'ingresso e l'uscita del sistema sono legati da equazioni differenziali.
  - (b) Il sistema non è lineare, dato che l'equazione di stato dipende in maniera non lineare dagli stati.
  - (c) Il sistema è di ordine 2 dato che ci sono due variabili di stato.

- (d) Il sistema non è MIMO, dato che sono presenti un solo ingresso e una sola uscita.
- (e) Il sistema è strettamente proprio, dato che l'equazione dell'uscita dipende solo dall'evoluzione dello stato e non direttamente dall'ingresso del sistema.
2. Per calcolare i punti di equilibrio del sistema si può notare che le due equazioni di stato sono disaccoppiate e quindi si possono studiare separatamente.

- (a) Analizziamo la prima equazione con il metodo grafico. In Figura 2 è mostrato il grafico della prima equazione al variare dei valori che può assumere  $u(t)$ .

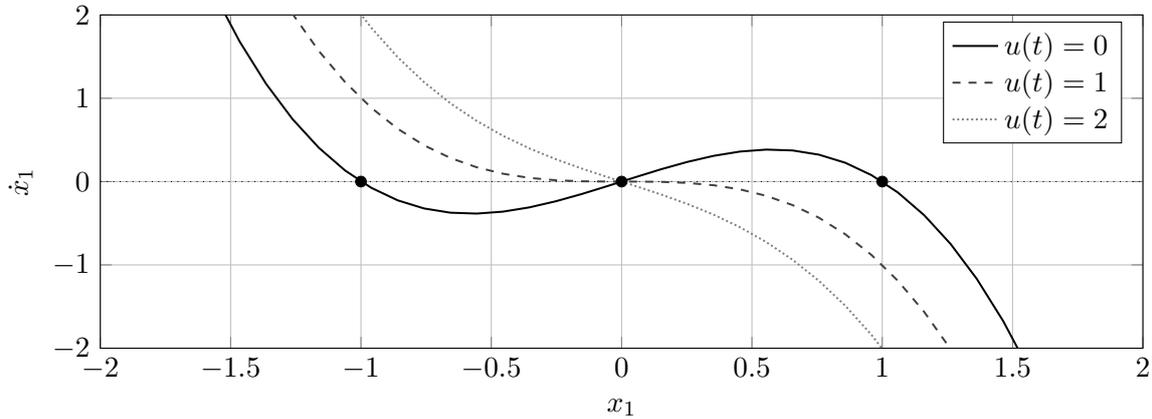


Figura 2: Grafico della prima equazione di stato per i valori che può assumere  $u(t)$ .

Si può vedere che per  $u(t) = 0$ , esistono 3 punti di equilibrio:

$$\bar{x}_1^{1,u=0} = -1, \quad \bar{x}_1^{2,u=0} = 0, \quad \bar{x}_1^{3,u=0} = 1.$$

Dal grafico possiamo concludere che  $\bar{x}_1^{1,u=0}$  e  $\bar{x}_1^{3,u=0}$  sono asintoticamente stabili, mentre  $\bar{x}_1^{2,u=0}$  è instabile.

Per  $u(t) = 1$  e  $u(t) = 2$  esiste un solo punto di equilibrio:

$$\bar{x}_1^{1,u=1} = 0, \quad \bar{x}_1^{1,u=2} = 0$$

che è in entrambi i casi asintoticamente stabile.

- (b) Analizziamo la seconda equazione di stato con il metodo grafico. In Figura 3 è mostrato il grafico della prima equazione al variare dei valori che può assumere  $u(t)$ .

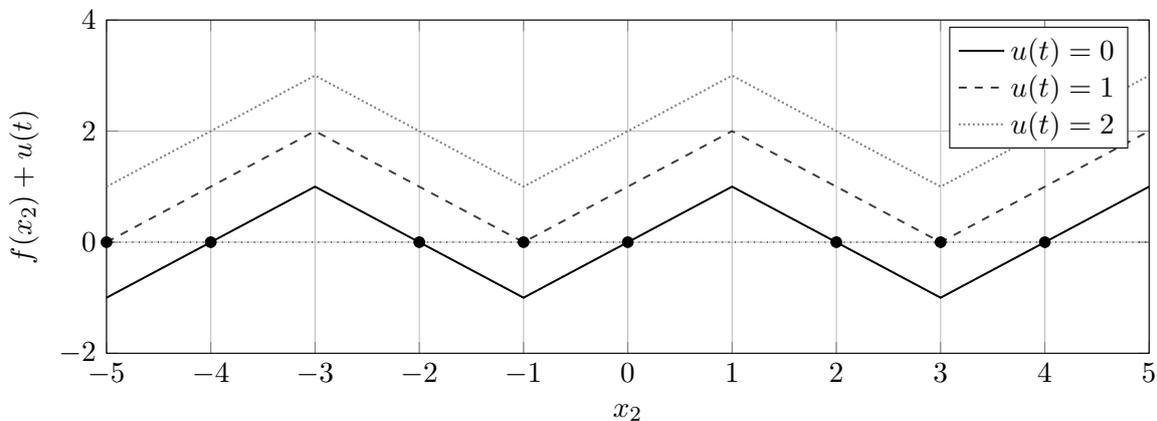


Figura 3: Grafico della seconda equazione di stato per i valori che può assumere  $u(t)$ .

- i. Per  $u(t) = 0$ , ci sono infiniti equilibri per tutti i valori pari di  $x_2$ . In particolare, tutti gli equilibri  $\bar{x}_2 = 4k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , si può vedere per via grafica che sono instabili, mentre tutti gli equilibri  $\bar{x}_2 = 4k - 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , si può vedere per via grafica che sono asintoticamente stabili.
- ii. Per  $u(t) = 1$ , ci sono infiniti equilibri per tutti i valori pari di  $x_2 = 4k + 3$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Tuttavia, dato che la funzione  $f(x_2) + 1 \geq 0$ ,  $\forall x_2$ , tutti gli equilibri sono instabili.
- iii. Per  $u(t) = 2$ , non ci sono equilibri.

In conclusione, gli equilibri asintoticamente stabili sono le coppie di equilibri  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  che sono singolarmente asintoticamente stabili. Per  $u(t) = 2$  non esistono equilibri dato che la seconda variabile di stato non ci sono equilibri.

3. Se al sistema viene applicato l'ingresso  $u(t) = 0$ , allora, partendo dalle condizioni iniziali  $x_1(0) = -1$  e  $x_2(0) = 2.1$ , il sistema parte già all'equilibrio. Quindi, l'evoluzione dello stato è necessariamente:

$$\begin{cases} x_1(t) = -1 \\ x_2(t) = 2 \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

## 2 Schemi a blocchi

Si consideri lo schema a blocchi in Figura 5

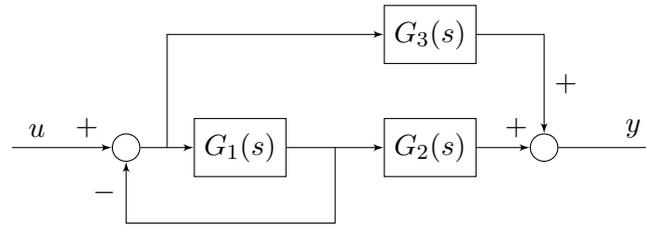


Figura 4: Schema a blocchi.

dove  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ , e  $G_3(s)$  sono funzioni di trasferimento di sistemi di ordine 1.

1. Determinare l'espressione della funzione di trasferimento  $H(s)$  del sistema complessivo in funzione di  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ , e  $G_3(s)$ .
2. Posti:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+3}, \quad G_2(s) = \frac{s+4}{s+0.1}, \quad G_3(s) = -\frac{1}{s+3},$$

verificare che:

$$H(s) = \frac{3.9}{(s+0.1)(s+4)}$$

e studiare le proprietà di stabilità del sistema avente ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$ .

3. Calcolare la risposta di regime (a transitorio esaurito) del sistema con funzione di trasferimento  $H(s)$  all'ingresso  $u(t) = e^{-2t} + 4$ ,  $t \geq 0$ .

### Soluzione

1. Si possono nominare alcuni dei segnali nello schema a blocchi come mostrato in Figura 5.

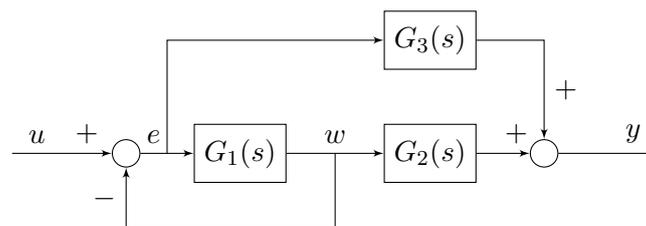


Figura 5: Schema a blocchi con alcuni segnali nominati.

Quindi si può impostare un sistema algebrico di equazioni:

$$\begin{cases} Y(s) = G_3(s)E(s) + G_2(s)W(s) \\ W(s) = G_1(s)E(s) \\ E(s) = U(s) - W(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(s) = G_3(s)E(s) + G_2(s)W(s) \\ W(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}U(s) \\ E(s) = U(s) - W(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(s) = G_3(s)E(s) + G_2(s)W(s) \\ W(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}U(s) \\ E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)}U(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(s) = \frac{G_3(s)}{1 + G_1(s)}U(s) + \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)}U(s) \\ W(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}U(s) \\ E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)}U(s) \end{cases}$$

$$H(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_3(s)}{1 + G_1(s)}$$

2. Sostituendo nell'espressione trovata in precedenza troviamo che:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G_1(s)G_2(s) + G_3(s)}{1 + G_1(s)} \\ &= \frac{1}{s+3} \frac{s+4}{s+0.1} - \frac{1}{s+3} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{s+3}}{1 + \frac{1}{s+3}} \\ &= \frac{\frac{1}{s+3} \left( \frac{s+4}{s+0.1} - 1 \right)}{1 + \frac{1}{s+3}} \\ &= \frac{3.9}{(s+3)(s+0.1) + (s+0.1)} \\ &= \frac{3.9}{(s+0.1)(s+4)} \end{aligned}$$

Dato che si è partiti dall'interconnessione di tre sistemi del primo ordine e si è trovato un sistema del secondo ordine, esiste un autovalore nascosto. Si deve notare che gli elementi  $G_2(s)$  e  $G_3(s)$  non sono inclusi in alcun anello di retroazione, e pertanto gli autovalori dei sistemi ad essi corrispondenti (ossia i loro poli) sono autovalori del sistema complessivo. Pertanto, da ciò si conclude che il sistema complessivo ha tre autovalori:  $-0.1, -3$ , e il terzo risulta dall'anello chiuso. Dato che la funzione di trasferimento presenta due poli (cioè  $s = -0.1$  e  $s = -4$ ), due autovalori sono questi ultimi, mentre quello nascosto è necessariamente  $-3$ . Perciò il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

3. Per calcolare la risposta di regime possiamo utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti e considerare i due contributi dell'ingresso presi singolarmente:

(a) Per  $u_1(t) = e^{-2t}$ , la sua trasformata di Laplace è:

$$U_1(s) = \mathcal{L}[u_1(t)](s) = \frac{1}{s+2}$$

per cui l'uscita può essere espressa come:

$$Y_1(s) = \frac{3.9}{(s+0.1)(s+4)(s+2)}$$

Applicando il teorema del valore finale (notare che si può applicare dato che tutte le radici di  $Y_1(s)$  sono strettamente negative:

$$y_{\infty,1} = \lim_{s \rightarrow 0} sY_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3.9}{(s+0.1)(s+4)(s+2)} = 0$$

(b) Per  $u_2(t) = 4$ , la sua trasformata di Laplace è:

$$U_2(s) = \mathcal{L}[u_2(t)](s) = \frac{4}{s}$$

per cui l'uscita può essere espressa come:

$$Y_2(s) = \frac{3.9 \cdot 4}{s(s + 0.1)(s + 4)}$$

Applicando il teorema del valore finale (notare che si può applicare dato che tutte le radici di  $Y_2(s)$  sono strettamente negative:

$$y_{\infty,2} = \lim_{s \rightarrow 0} sY_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3.9 \cdot 4}{(s + 0.1)(s + 4)} = 39$$

Per cui la risposta di regime tende a  $y_{\infty} = 39$ .

### 3 Sistema in anello aperto

Si consideri il seguente sistema in spazio di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -20x_1(t) + 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

1. Si risponda alle seguenti domande, giustificando le risposte:
  - (a) Si calcoli la funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema.
  - (b) Si individuino poli, zeri e guadagno della funzione di trasferimento  $G(s)$ .
  - (c) Il sistema è asintoticamente stabile?
  - (d) Il sistema è a fase minima?
2. Si traccino i diagrammi di Bode (del modulo e della fase) di  $G(s)$ .
3. Si calcoli l'espressione analitica della risposta forzata dell'uscita a fronte di un ingresso  $u(t) = e^{\alpha t} \text{sca}(t)$  nei casi:
  - (a)  $\alpha = 0$
  - (b)  $\alpha = -10$
4. Si calcoli l'espressione analitica della risposta libera dell'uscita del sistema avente condizioni iniziali:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#### Soluzione

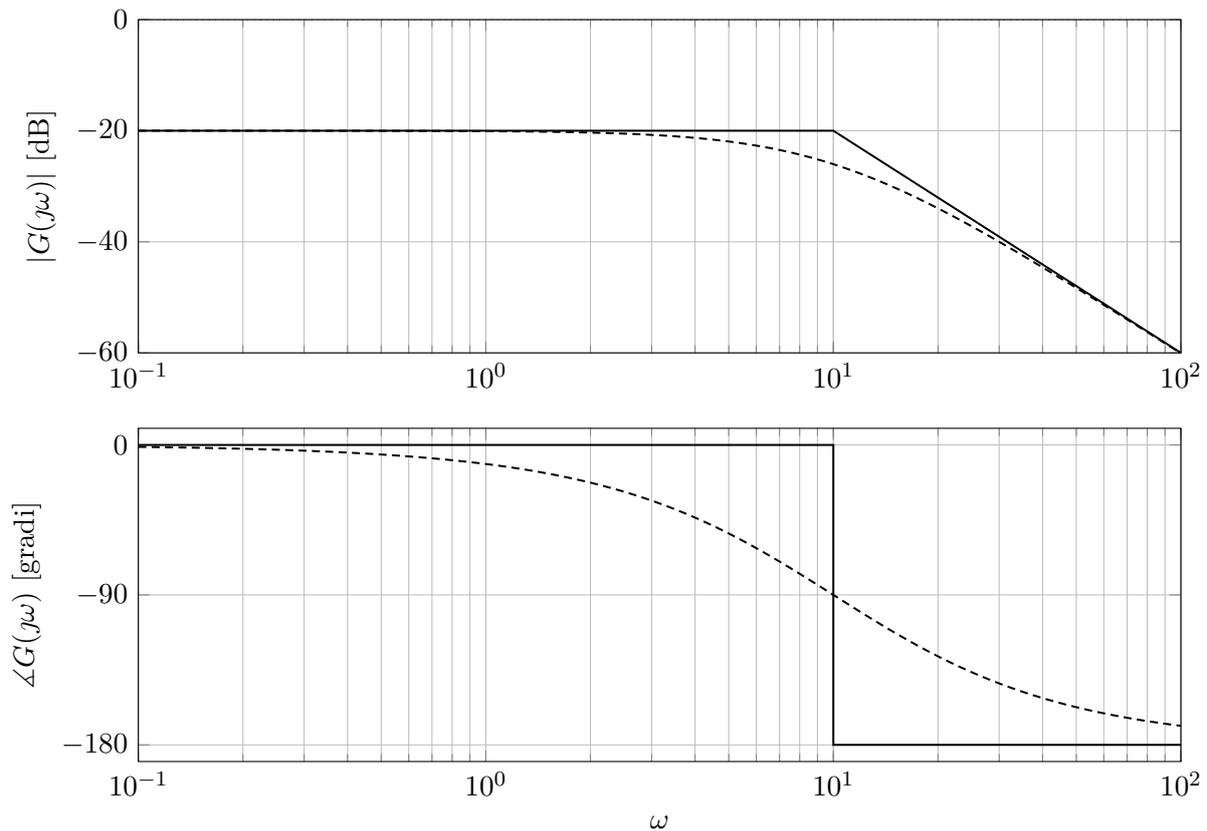
1. Rispondiamo per punti:

- (a) La funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema è:

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 20 & -10 \\ 10 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{s(s + 20) + 100} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 10 \\ -10 & s + 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{10}{(s + 10)^2} \end{aligned}$$

- (b) La funzione di trasferimento  $G(s)$  non ha zeri, ha due poli coincidenti in  $s = -10$ . Il guadagno (generalizzato) del sistema è  $G(0) = \frac{1}{10}$ .
- (c) Il sistema è asintoticamente stabile dato che i due poli del sistema sono con parte reale strettamente negativa, e non ci sono autovalori nascosti.
- (d) Il sistema è a fase minima dato che il guadagno è positivo, non ci sono zeri e tutti i poli del sistema sono con parte reale strettamente negativa.

2. Il diagramma di Bode di  $G(s)$  è mostrato in Figura 6.

Figura 6: Diagramma di Bode di  $G(s)$ .

3. La trasformata di Laplace del generico ingresso  $u(t) = e^{\alpha t} \text{sca}(t)$  è:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{1}{s - \alpha}$$

per cui l'espressione dell'uscita è:

$$Y(s) = \frac{10}{(s + 10)^2(s - \alpha)}$$

(a) Nel caso di  $\alpha = 0$  è quindi:

$$Y(s) = \frac{10}{s(s + 10)^2}$$

che può essere espressa come:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{a_1}{s + 10} + \frac{a_2}{(s + 10)^2} + \frac{a_3}{s} \\ &= \frac{a_1(s + 10)s + a_2s + a_3(s + 10)^2}{s(s + 10)^2} \end{aligned}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t) = a_1 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 10}\right](t) + a_2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 10)^2}\right](t) + a_3 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) \\ &= a_1 e^{-10t} + a_2 t e^{-10t} + a_3 \end{aligned}$$

Possiamo quindi sostituire alcuni valori di  $s$ :

- $s = -10$ , ottenendo:

$$10 = a_2(-10), \quad \Rightarrow \quad a_2 = -1$$

- $s = 0$ , ottenendo:

$$10 = a_3(10)^2, \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{10}$$

- $s = -9$ , ottenendo:

$$10 = a_1(-9 + 10)(-9) + a_2(-9) + a_3(-9 + 10)^2$$

$$10 = -9a_1 + 9 + \frac{1}{10}$$

$$a_1 = -\frac{1}{10}$$

Per cui, se  $\alpha = 0$ , l'espressione analitica dell'uscita è:

$$y(t) = -\frac{1}{10}e^{-10t} - te^{-10t} + \frac{1}{10}$$

- (b) Nel caso di  $\alpha = -10$ :

$$Y(s) = \frac{10}{(s + 10)^3}$$

Per cui:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t) = 10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 10)^3}\right](t)$$

$$10\frac{t^2}{2}e^{-10t} = 5t^2e^{-10t}$$

4. Per calcolare l'espressione analitica della risposta libera dell'uscita a partire dalle condizioni iniziali date, possiamo portare il sistema in trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = -20X_1(s) + 10X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = -10X_1(s) \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1(s)(s + 20) = 10\left(-\frac{10}{s}X_1(s) + \frac{1}{s}\right) + 1 \\ X_2(s) = -\frac{10}{s}X_1(s) + \frac{1}{s} \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1(s)\left(s + 20 + \frac{100}{s}\right) = \frac{s + 10}{s} \\ X_2(s) = -\frac{10}{s}X_1(s) + \frac{1}{s} \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1(s) = \frac{s + 10}{s} \cdot \frac{s}{(s + 10)^2} = \frac{1}{s + 10} \\ X_2(s) = -\frac{10}{s(s + 10)} + \frac{1}{s} = \frac{-10 + s + 10}{s(s + 10)} = \frac{1}{s + 10} \\ Y(s) = \frac{1}{s + 10} \end{cases}$$

L'espressione analitica di  $y(t)$  è quindi data da:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 10}\right](t) = e^{-10t}.$$

## 4 Sistema a fase non minima

Si consideri lo schema di controllo rappresentato in Figura 7

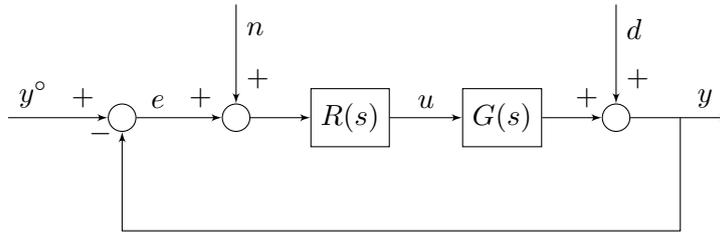


Figura 7: Schema di controllo.

dove

$$G(s) = \frac{1 - 0.1s}{(1 + 0.1s)(1 + s)(1 + 10s)},$$

è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine, da controllare.

1. Si determini la funzione di trasferimento  $R(s)$  del regolatore di ordine minimo in modo tale che
  - (a) L'errore a transitorio esaurito  $e_\infty$  soddisfi la limitazione  $|e_\infty| \leq 0.001$  quando  $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$ ,  $n(t) = 0$  e  $d(t) = 0$ .
  - (b) L'errore a transitorio esaurito  $e_\infty$  soddisfi la limitazione  $|e_\infty| \leq 0.1$  quando  $y^\circ(t) = 0$ ,  $n(t) = \sin(\omega_n t)$  e  $d(t) = 0$ , con  $\omega_n \geq 10^2$ .
  - (c) L'errore a transitorio esaurito  $e_\infty$  soddisfi la limitazione  $|e_\infty| \leq 0.1$  quando  $y^\circ(t) = 0$ ,  $n(t) = 0$  e  $d(t) = \sin(\omega_d t)$ , con  $\omega_d \leq 0.1$ .
  - (d) Il margine di fase  $\varphi_m$  sia maggiore o uguale a  $50^\circ$ .
  - (e) La pulsazione critica  $\omega_c$  sia maggiore o uguale a 3.
2. Si determini la funzione di trasferimento  $R^*(z)$  del regolatore ottenuto discretizzando  $R(s)$  con il metodo di Eulero implicito e con il valore di  $T_s = 0.1$ , valutando la variazione di margine di fase dovuta alla discretizzazione.
3. Scrivere la corrispondente legge di controllo a tempo discreto.

### Soluzione

#### 1. Progetto statico

Dato che il valore di regime dell'errore richiesto non è nullo, si può scegliere  $g_L = 0$ , come tipo di  $L(s) = R(s)G(s)$ . Infatti, se si suppone che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile, si può applicare il teorema del valore finale con la funzione di trasferimento da  $y^\circ(t)$  a  $e(t)$ , data da:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}.$$

Si ha quindi:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \mu_L} = \frac{1}{1 + \mu_L}.$$

Imponendo che:

$$\frac{1}{1 + \mu_L} \leq 0.001 \quad \Rightarrow \quad \mu_L \geq 1000.$$

Quindi si può, ad esempio, scegliere  $R_1(s) = \mu_L = 1000$ .

Per quanto riguarda i vincoli sui disturbi si osserva che:

- La funzione di trasferimento da  $n(t)$  ad  $e(t)$  è:

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} =: F(s)$$

Il modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $F(s)$  può essere approssimato come:

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ |L(j\omega)|, & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Dato che  $\omega_n > \omega_c$ , si può imporre il vincolo:

$$|L(j\omega)| < \frac{1}{10}, \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)|_{\text{dB}} < -20\text{dB}$$

- La funzione di trasferimento da  $d(t)$  ad  $e(t)$  è:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} =: S(s)$$

Il modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $S(s)$  può essere approssimato come:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|}, & \omega < \omega_c \\ 1, & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Dato che  $\omega_d < \omega_c$ , si può imporre il vincolo:

$$\frac{1}{|L(j\omega)|} < \frac{1}{10} \\ |L(j\omega)| > 10, \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)|_{\text{dB}} > 20\text{dB}$$

I vincoli sull'errore a transitorio esaurito relativo ai disturbi  $n(t)$  ed  $d(t)$  sono riportati sul diagramma di Bode del modulo come vincolo (Figura 8).

### Progetto dinamico

Scegliendo  $R_1(s) = \mu_L = 1000$  derivante dal progetto statico, si ha una funzione di trasferimento d'anello  $L_1(s) = \mu_L G(s)$ , che ha un margine di fase negativo, come si può verificare dai diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza associata a  $L_1(s)$ , mostrati in Figura 8.

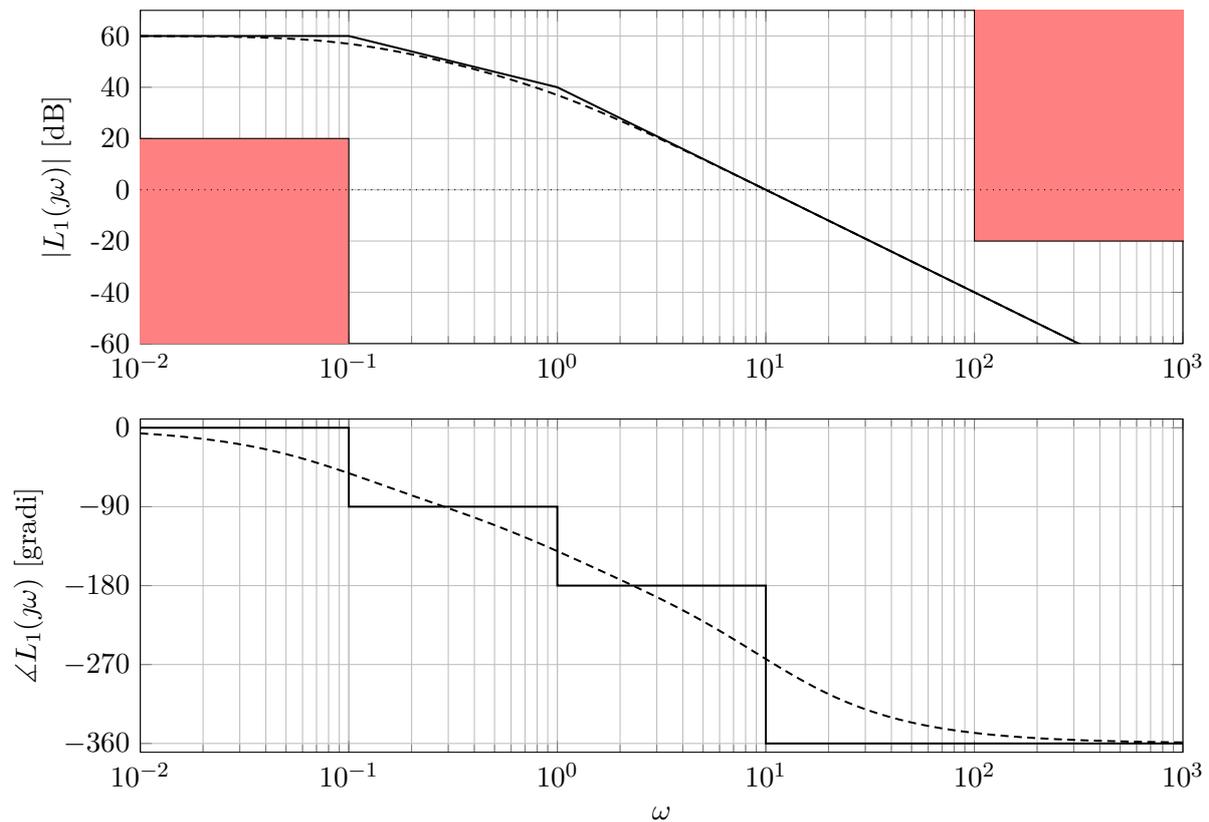


Figura 8: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L_1(s)$ .

Si può quindi cercare di sfruttare le specifiche di progetto e ottenere la  $\omega_c$  di  $L(s)$  pari a  $\omega_c = 3$ , e che cancelli i due poli in bassa frequenza. Si deve poi fare scendere  $L_1(s)$  ed  $L(s)$  con la stessa pendenza per rendere realizzabile il regolatore, per cui si può aggiungere un polo in alta frequenza.

Si ottiene, quindi:

$$L(s) = G(s)1000 \frac{(1+s)(1+10s)}{(1+s/0.003)(1+s/100)} = 1000 \frac{1-0.1s}{(1+0.1s)(1+s/0.003)(1+s/100)}.$$

I diagrammi di Bode della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$  sono mostrati in Figura 9.

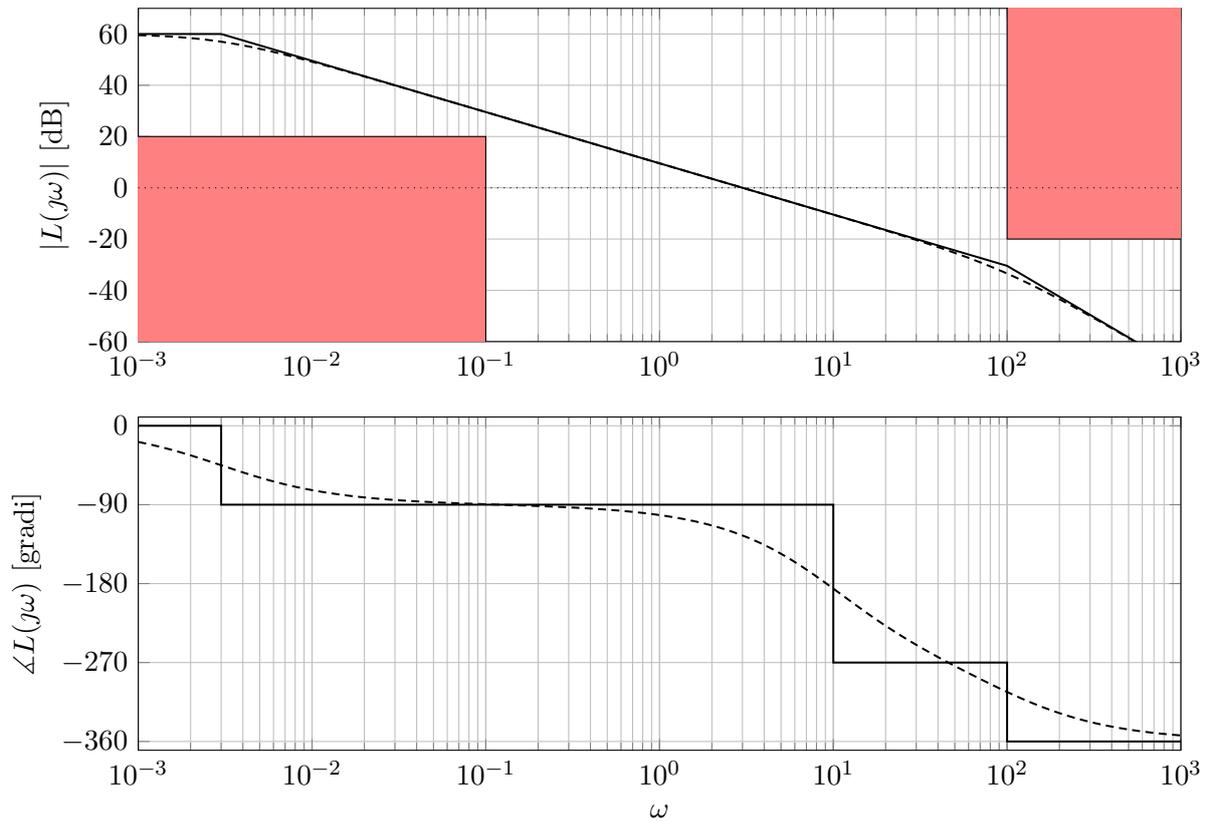


Figura 9: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .

Calcolando il margine di fase di  $L(s)$  si ottiene:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \angle L(j\omega_c) = \arctan(-0.1\omega_c) - \arctan(0.1\omega_c) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{0.003}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{100}\right) \\ &\simeq -16.6992^\circ - 16.6992^\circ - 89.9427^\circ - 1.7184^\circ = -125.0596^\circ \\ \varphi_m &= 180^\circ - |\varphi_c| = 54.9404^\circ,\end{aligned}$$

per cui il requisito sul margine di fase è rispettato.

Il regolatore così ottenuto è:

$$R(s) = 1000 \frac{(1+s)(1+10s)}{(1+s/0.003)(1+s/100)}$$

2. Ci sono diversi modi per discretizzare il controllore:

$$\begin{aligned}s &= \frac{z-1}{T_s}, & \text{Eulero Esplicito} \\ s &= \frac{z-1}{zT_s}, & \text{Eulero Implicito} \\ s &= \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}, & \text{Tustin}\end{aligned}$$

Nel caso in questione viene richiesto di utilizzare il metodo di Eulero Implicito per  $T_s = 0.1$ ,

quindi:

$$\begin{aligned}
 R^*(z) &= R(s)|_{s=10 \cdot \frac{z-1}{z}} = 1000 \frac{\left(1 + 10 \cdot \frac{z-1}{z}\right) \left(1 + 100 \cdot \frac{z-1}{z}\right)}{\left(1 + 10 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1000}{3}\right) \left(1 + 10 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{100}\right)} \\
 &= 1000 \frac{\left(\frac{z + 10(z-1)}{z}\right) \left(\frac{z + 100(z-1)}{z}\right)}{\left(\frac{z + \frac{10000}{3}(z-1)}{z}\right) \left(\frac{z + 0.1 \cdot (z-1)}{z}\right)} \\
 &= 1000 \frac{(z + 10(z-1))(z + 100(z-1))}{\left(z + \frac{10000}{3}(z-1)\right)(z + 0.1 \cdot (z-1))} \\
 &= 30000 \frac{(11z - 10)(101z - 100)}{(10003z - 10000)(11z - 1)}
 \end{aligned}$$

La variazione del margine di fase ottenuta con  $T_s = 0.1$ , trascurando lo sfasamento introdotto dal ritardo di elaborazione e dall'inserimento del filtro antialiasing, è:

$$\Delta\varphi_m = -\frac{T_s}{2} \cdot \omega_c \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{0.1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{27}{\pi} \simeq -8.6^\circ$$

3. Per scrivere la legge di controllo si riscrive l'espressione del regolatore come:

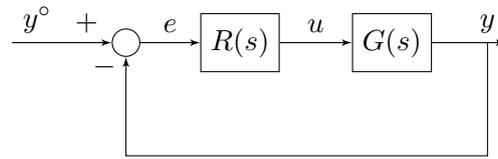
$$\begin{aligned}
 R^*(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = 30000 \frac{(11z - 10)(101z - 100)}{(10003z - 10000)(11z - 1)} \\
 U(z)(10003z - 10000)(11z - 1) &= 30000E(z)(11z - 10)(101z - 100) \\
 U(z)(110030z^2 - 120003z + 10000) &= 30000E(z)(1111z^2 - 2110z + 1000)
 \end{aligned}$$

antitrasformando, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 110030u(k+2) - 120003u(k+1) + 10000u(k) &= 30000(1111e(k+2) - 2110e(k+1) + 1000e(k)) \\
 u(k+2) &= \frac{120003}{110030}u(k+1) - \frac{10000}{110030}u(k) + \frac{30000}{110030}(1111e(k+2) - 2110e(k+1) + 1000e(k)) \\
 u(k) &= \frac{120003}{110030}u(k-1) - \frac{10000}{110030}u(k-2) + \frac{30000}{110030}(1111e(k) - 2110e(k-1) + 1000e(k-2)) \\
 u(k) &= 1.091u(k-1) - 0.091u(k-2) + 302.917e(k+2) - 575.298e(k+1) + 272.653e(k)
 \end{aligned}$$

## 5 Integratore nel processo

Si consideri il seguente schema di controllo:



dove

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$$

Si progetti  $R(s)$  in modo tale che:

$$\begin{aligned} |e_\infty| &= 0 & y^\circ &= \text{sca}(t) \\ \omega_c &\geq 1 \text{ rad/s} \\ \varphi_m &\geq 50^\circ \end{aligned}$$

### Soluzione

#### Progetto statico

Sia  $R(s) = R_1(s)R_2(s)$  con  $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}$ .

Supponendo il sistema asintoticamente stabile in anello chiuso, applichiamo il teorema del valore finale:

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)}Y^\circ(s)$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1+L(s)} Y^\circ(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{1}{1 + \frac{10 \mu_R}{s^{g_R}}} \cdot \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_R+1}}{s^{g_R+1} + \mu_R} = 0, \quad \forall g_R \geq 0$$

Ma allora anche un regolatore di tipo nullo ( $g_R = 0$ ) consente di ottenere errore nullo a transitorio esaurito.

Si osservi che il tipo della funzione di trasferimento d'anello è la somma del tipo della F.d.T. del processo e del tipo della F.d.T. del regolatore:

$$g_L = g_G + g_R$$

In questo caso  $g_G = 1$ , per cui anche con  $g_R = 0$  si garantisce che  $g_L = 1$ , condizione per avere errore statico nullo. In altre parole, l'integratore necessario per annullare l'errore è già presente nel processo, per cui non occorre metterlo nel regolatore. Pertanto il **progetto statico non pone vincoli sul regolatore**. Formalmente, possiamo porre  $R_1(s) = 1$ .

#### Progetto dinamico

Poiché  $L(s) = R_2(s)G(s)$ , tracciamo il diagramma di  $|G(j\omega)|$  per controllare se le specifiche sono già soddisfatte:

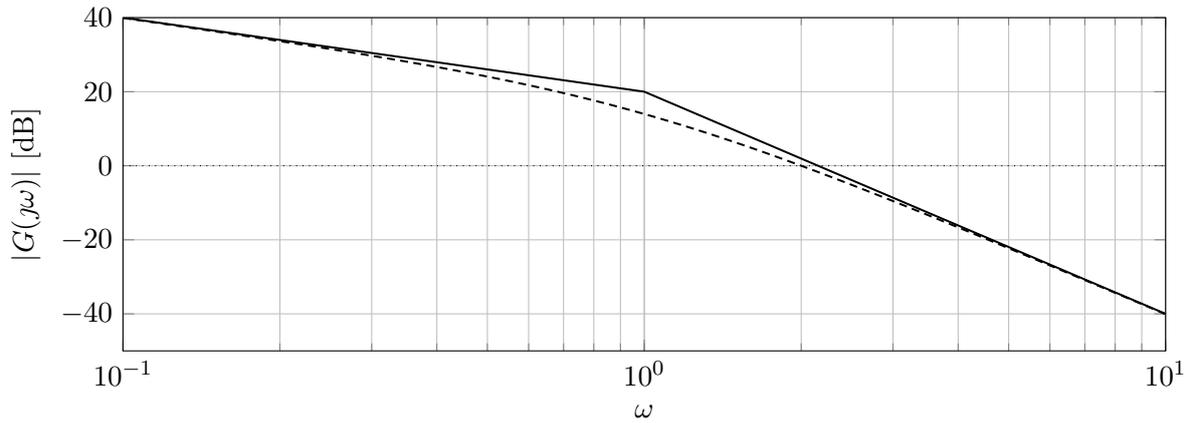


Figura 10: Diagramma di Bode del Modulo.

Si ha  $\omega_c = 10^{\frac{1}{3}} \simeq 2$  (che andrebbe bene) ma

$$\varphi_m = 180^\circ - | -90^\circ - 2 \arctan(2) | = 180^\circ - | -90^\circ - 2 \cdot 63^\circ | = -36^\circ < 0$$

Pertanto il sistema sarebbe instabile in anello chiuso.

Il progetto del regolatore si può impostare imponendo che la  $|L(j\omega)|$  tagli l'asse a 0 dB alla pulsazione 1 rad/s, con pendenza -1, cancellando i due poli del processo alla pulsazione 1 e spostandoli alla pulsazione 3.

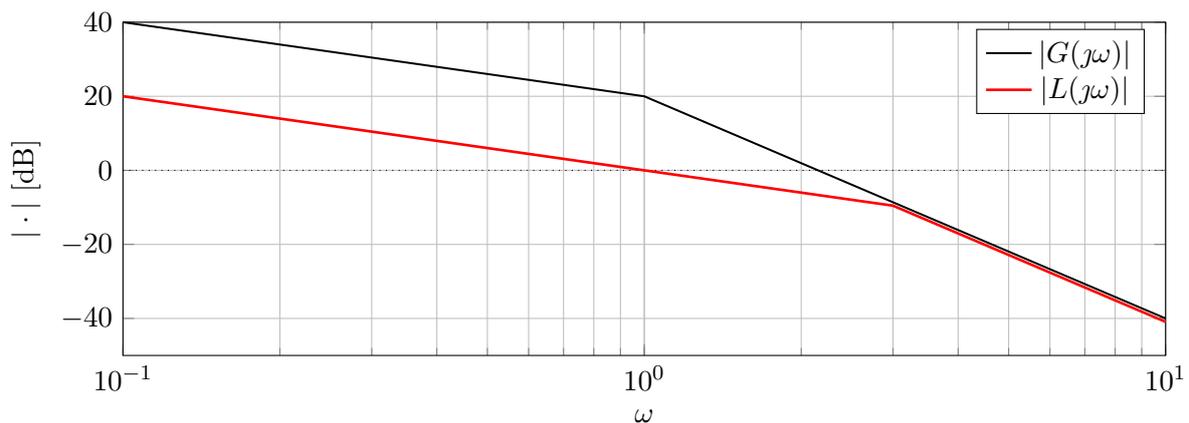


Figura 11: Diagramma di Bode del Modulo.

Per ottenere la pulsazione in cui si incrociano i due diagrammi di Bode basta scrivere le equazioni delle rette dei due diagrammi di Bode e metterle a sistema.

$$\begin{cases} y - 20 = -60 (\log(\omega) - 0) \\ y - 0 = -20 (\log(\omega) - 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -60 \log(\omega) + 20 \\ y = -20 \log(\omega) \end{cases}$$

$$-20 \log(\omega) = -60 \log(\omega) + 20 \Rightarrow \log(\omega) = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = 10^{\frac{1}{2}} \simeq 3$$

Poiché il progetto statico non ha portato ad alcun vincolo sul guadagno del regolatore, si può far correre in bassa frequenza il diagramma di  $|L(j\omega)|$  parallelo a quello di  $|G(j\omega)|$  (non c'è bisogno di ricongiungerli).

L'espressione di  $L(s)$  è la seguente:

$$L(s) = \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{3}\right)^2}$$

da cui risulta che  $\omega_c = 1$  e  $\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 2 \arctan(1/3)| = 180^\circ - |-90^\circ - 2 \cdot 18^\circ| = 54^\circ$ .

Tutte le specifiche sono soddisfatte. L'espressione della F.d.T. del regolatore è quindi la seguente:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = 0.1 \cdot \frac{(1+s)^2}{\left(1 + \frac{s}{3}\right)^2}$$