

Esercitazione 13: Esercitazione di ripasso per la II prova in itinere

20 giugno 2016 (3h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1 Analisi prestazioni

In Figura 1 sono rappresentati i diagrammi di Bode (asintotici ed esatti) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$.

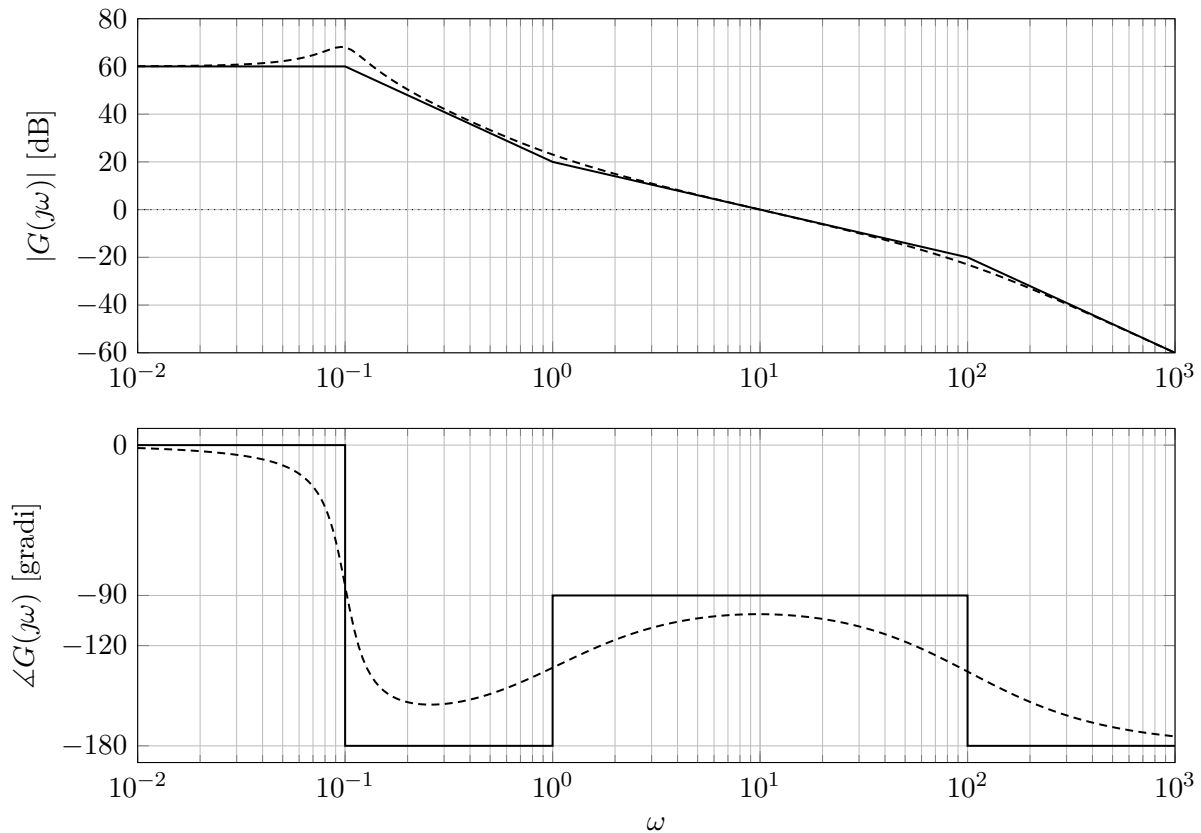


Figura 1: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$.

1. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
 - (a) La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t)$ si assesta al valore 1000.
 - (b) La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t)$ presenta oscillazioni ripetute smorzate.
 - (c) I transitori si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.
 - (d) I segnali sinusoidali in ingresso $u(t) = \sin(\omega t)$ con pulsazione $\omega \in [100, 1000]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.
2. Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in Figura 2 ed è presente un disturbo additivo sull'uscita $d(t)$.

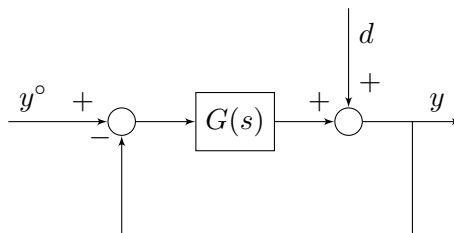


Figura 2: Schema con cui viene retroazionato il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- (b) La risposta del sistema retroazionato all'ingresso $y^\circ(t) = sca(t)$, con $d(t) = 0$, si assesta al valore 1000.
- (c) I transitori del sistema retroazionato dovuti alla condizione iniziale si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.
- (d) I segnali sinusoidali in ingresso al sistema retroazionato $y^\circ(t) = \sin(\omega t)$, con pulsazione $\omega \in [100, 1000]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.
- (e) I disturbi sinusoidali sull'uscita del sistema retroazionato $d(t) = \sin(\omega t)$ con pulsazione $\omega \in [0.01, 0.1]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 10.
3. Dire, giustificando la risposta, come e se cambierebbero le risposte al punto 2, nel caso in cui il disturbo $d(t)$ fosse additivo sull'ingresso al sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ invece che sull'uscita, come mostrato in Figura 3.

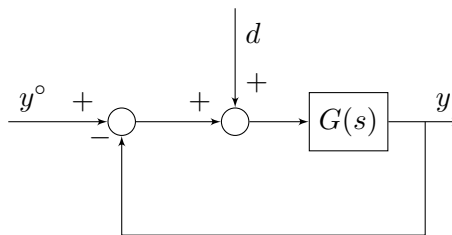


Figura 3: Schema con cui viene retroazionato il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ con disturbo additivo sull'ingresso.

Soluzione

1. Il tipo della funzione di trasferimento $G(s)$ è $g = 0$, perché la pendenza del diagramma asintotico del modulo è zero a basse pulsazioni ($\omega < 0.1$).
 Il guadagno è $\mu_G = 1000$, perché nei diagrammi asintotici il modulo è 60dB e la fase è zero a basse pulsazioni ($\omega < 0.1$).
 $G(s)$ ha due poli complessi coniugati con modulo $\omega_n = 0.1$, perché il diagramma esatto del modulo presenta un picco in prossimità di $\omega = 0.1$, e parte reale strettamente negativa (perché nel diagramma di Bode asintotico della fase, la fase decresce di 180° a $\omega = 0.1$). La presenza del picco di risonanza ci suggerisce inoltre che il fattore di smorzamento ξ soddisfa $0 < \xi < \sqrt{2}/2$.
 $G(s)$ ha inoltre uno zero singolo (e quindi necessariamente reale) negativo con modulo 1, perché nel diagramma di Bode del modulo la pendenza aumenta di 20dB/decade alla pulsazione $\omega = 1$, e nel diagramma di Bode asintotico della fase, la fase aumenta a scalino di 90° .
 Infine, $G(s)$ ha un polo singolo (reale) negativo con modulo 100, perché alla pulsazione $\omega = 100$ la pendenza del diagramma di Bode asintotico del modulo decresce di 20dB/decade e corrispondentemente si ha una variazione di -90° della fase.

Quindi:

- (a) *La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t)$ si assesta al valore 1000.*
 Vero.
 Il guadagno di $G(s)$ è $\mu = 1000$, e il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile.
- (b) *La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t)$ presenta oscillazioni ripetute smorzate.*
 Vero.
 $G(s)$ presenta due poli complessi coniugati con $\omega_n = 0.1$ e $0 < \xi < \sqrt{2}/2$.
- (c) *I transitori si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.*
 Falso.

La costante di tempo dominante è quella associata ai due poli complessi coniugati perché la loro costante di tempo è:

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} > \frac{1}{\omega_n} = 10,$$

mentre il polo reale ha una costante di tempo $\tau = 1/100$. Quindi la costante di tempo dominante è $\tau_D > 10$, a cui corrisponde un tempo di assestamento superiore a 50 unità di tempo.

- (d) *I segnali sinusoidali in ingresso $u(t) = \sin(\omega t)$ con pulsazione $\omega \in [100, 1000]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.*

Vero.

A regime $y_\infty(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$ ha un'ampiezza pari a $|G(j\omega)|$ e $|G(j\omega)|_{\text{dB}} < -20\text{dB}$ per $\omega \in [100, 1000]$, quindi $|G(j\omega)| < 1/10$, $\omega \in [100, 1000]$.

2. La funzione d'anello del sistema retroazionato è $L(s) = G(s)$.

- (a) *Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.*

Vero.

Il criterio di Bode è applicabile perché:

- i. $G(s)$ è funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile, quindi eventuali autovalori nascosti hanno tutti parte reale strettamente negativa;
- ii. I poli di $G(s)$ hanno tutti parte reale strettamente negativa;
- iii. La pulsazione critica ω_c è ben definita e pari a $\omega_c = 10$, come si vede dal diagramma di Bode del modulo in Figura 1.

Quindi, dato che $\mu_G = 1000 > 0$ e che $\varphi_m = 180^\circ - |\angle G(j10)| > 0$, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per il criterio di Bode.

- (b) *La risposta del sistema retroazionato all'ingresso $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$, con $d(t) = 0$, si assesta al valore 1000.*

Falso.

La risposta allo scalino del sistema retroazionato si assesta al valore del guadagno di:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

che è pari a

$$\mu_F = \frac{10^3}{1 + 10^3} \simeq 1.$$

- (c) *I transitori del sistema retroazionato si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.*

Vero.

Dato che $\varphi_m > 60^\circ$, allora $F(s)$ si può approssimare con una funzione a polo singolo pari a:

$$F(s) \simeq \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}, \quad \omega_c = 10$$

quindi il tempo di assestamento del sistema retroazionato è $T_a \simeq 5/\omega_c = 0.5$.

- (d) *I segnali sinusoidali in ingresso al sistema retroazionato $y^\circ(t) = \sin(\omega t)$ con pulsazione $\omega \in [100, 1000]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.*

Vero.

Il modulo della funzione di trasferimento $F(s)$

$$|F(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)|}$$

e può essere approssimato come:

$$|F(j\omega)| \simeq |F(j\omega)|_{\simeq} = \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ |G(j\omega)| & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Dato che il segnale sinusoidale $y^\circ(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \in [100, 1000]$ ha frequenza molto maggiore di $\omega_c = 10$, allora:

$$y_\infty(t) = |F(j\omega)| \sin(\omega t + \angle F(j\omega)) \simeq |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle F(j\omega)).$$

Dato che $|G(j\omega)| < 1/10$ per $\omega \in [100, 1000]$, come si vede in Figura 1, $y^\circ(t)$ è attenuato in ampiezza di almeno un fattore 10.

- (e) *I disturbi sinusoidali additivi sull'uscita del sistema retroazionato $d(t) = \sin(\omega t)$ con pulsazione $\omega \in [0.01, 0.1]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 10. Vero.*

La funzione di trasferimento $H(s)$ dal disturbo $d(t)$ sull'uscita $y(t)$ è data da

$$H(s) = \frac{1}{1 + G(s)},$$

il cui modulo della risposta in frequenza può essere approssimato come

$$|H(j\omega)| \simeq |H(j\omega)|_{\simeq} = \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \omega < \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Dato che i segnali sinusoidali $d(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \in [0.01, 0.1]$ sono tutti con pulsazione molto minore di $\omega_c = 10$, allora l'uscita a regime corrispondente è:

$$y_\infty(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega)),$$

che ha ampiezza $|H(j\omega)| \simeq 1/|G(j\omega)| < 1/1000$, $\omega \in [0.01, 0.1]$, quindi sono attenuati di almeno un fattore 1000.

3. Le risposte ai punti 2a, 2b, 2c, 2d sono invariate perché:

- 2a e 2c: nei sistemi lineari la stabilità e i transienti non dipendono dall'ingresso e quindi si può porre $d(t) = 0$, $t \geq 0$, ottenendo lo stesso schema nei due casi di Figura 2 e 3.
- 2b e 2d: non dipendono dal disturbo $d(t)$ ma dall'ingresso $y^\circ(t)$.

La risposta al quesito 2e cambia e l'affermazione è falsa. La funzione di trasferimento da $d(t)$ a $y(t)$ è uguale a quella da $y^\circ(t)$ a $y(t)$:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}.$$

L'uscita di regime diventa:

$$y_\infty(t) = |F(j\omega)| \sin(\omega t + \angle F(j\omega)), \quad \omega \in [0.01, 0.1]$$

con

$$|F(j\omega)| \simeq |F(j\omega)|_{\simeq} = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ |F(j\omega)|, & \omega > \omega_c \end{cases}.$$

Essendo $\omega_c = 10$, allora il disturbo passa invariato sull'uscita. Da notare che lo schema in Figura 3 è equivalente per quanto riguarda le funzioni di trasferimento allo schema con disturbo additivo sull'uscita $w(t)$ (come mostrato in Figura 4).

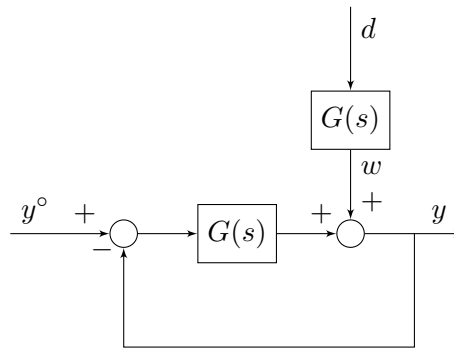


Figura 4: Schema equivalente allo schema in Figura 3.

$w_\infty(t)$ corrispondente a $d(t) = \sin(\omega t)$ è:

$$w_\infty(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)),$$

e ha quindi ampiezza riscalata rispetto a $d(t)$. La funzione di trasferimento da $w(t)$ a $y(t)$ è:

$$H(s) = \frac{1}{1 + G(s)}$$

e

$$|H(j\omega)| \simeq \frac{1}{G(j\omega)}, \quad \text{per } \omega \in [0.01, 0.1].$$

Se $\omega \in [0.01, 0.1]$, $w_\infty(t)$ ha ampiezza amplificata di un fattore $|G(j\omega)|$ rispetto a quella di $d(t)$, e questo compensa l'attenuazione $1/|G(j\omega)|$ che $w_\infty(t)$ subisce sull'uscita $y(t)$. Da ciò si perviene al risultato sopra che $d(t)$ passa invariato sull'uscita.

2 Sistema in anello aperto

In Figura 5 sono rappresentati i diagrammi di Bode (esatti e approssimati) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico lineare di ordine 3.

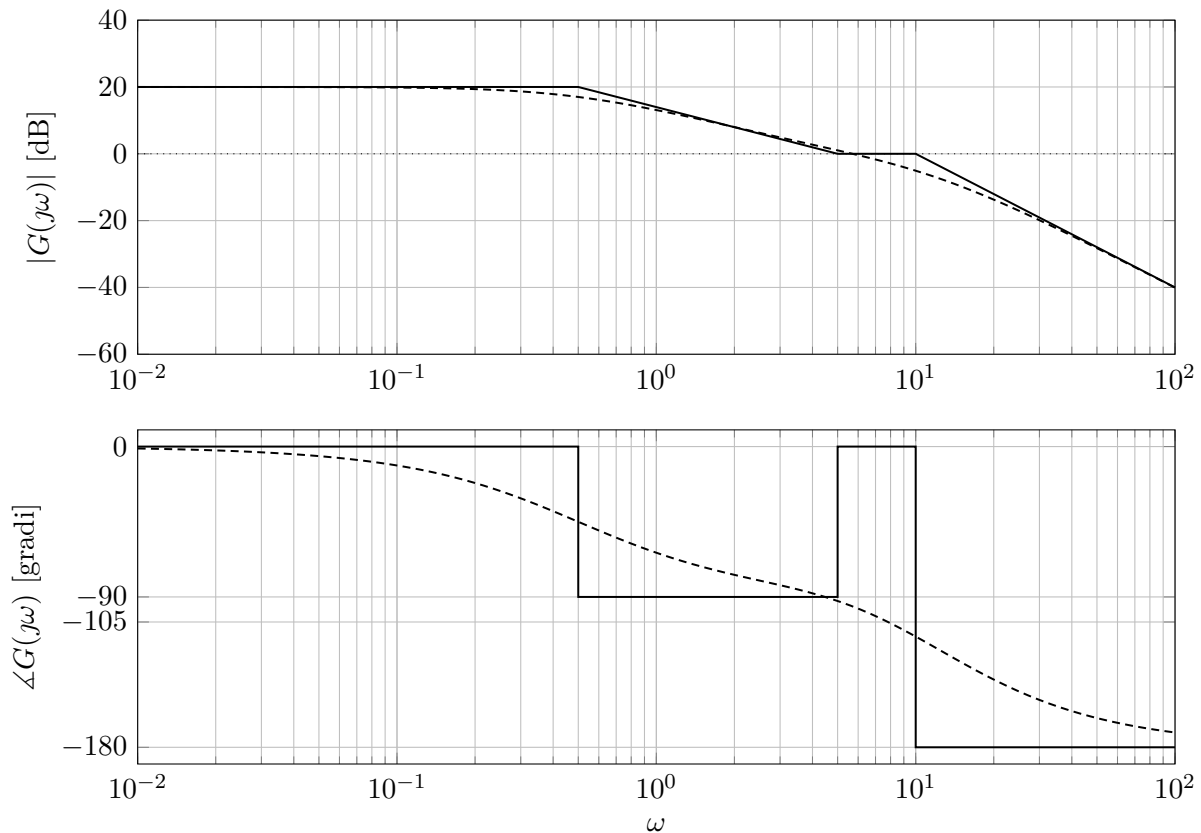


Figura 5: Diagrammi di Bode di $G(s)$.

1. Verificare che il sistema è asintoticamente stabile e tracciare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.
2. Determinare l'espressione analitica della risposta di regime del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ all'ingresso $u(t) = \sin(100t) + \cos(0.01t)$.
3. Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene retroazionato con retroazione negativa unitaria come indicato in Figura 6.

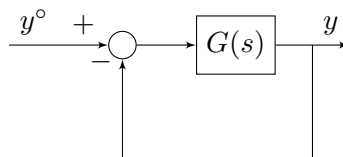


Figura 6: Schema con cui viene retroazionato $G(s)$.

- (a) Verificare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile e tracciare la risposta del sistema all'ingresso $y^o(t) = \text{sca}(t)$.
- (b) Determinare l'espressione analitica della risposta di regime del sistema retroazionato all'ingresso $y^o(t) = 10 + \sin(100t)$. Valutare il tempo necessario affinché la risposta del sistema si assesti a quella di regime calcolata.

4. Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene inserito nello schema di controllo in Figura 7, dove $R(s)$ è la funzione di trasferimento del regolatore.

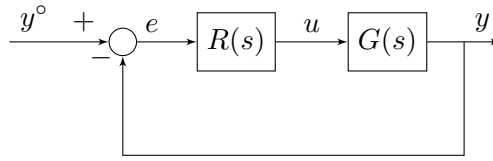


Figura 7: Schema di controllo.

- (a) Posto $R(s) = k$, dire se esiste un valore di $k > 1$ tale che il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.
- (b) Posto $R(s) = \frac{k}{s}$, dire se esiste un valore di $k > 1$ tale che il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.

Soluzione

1. Dal diagramma di Bode del modulo si può vedere che ci sono tre cambiamenti nella pendenza. In particolare si vede che:

- A $\omega = 0.5$, il modulo decrementa la pendenza di 20dB/decade, mentre la fase scende di 90° corrispondentemente. C'è quindi un polo nel semipiano sinistro.
- A $\omega = 5$, il modulo incrementa la pendenza di 20dB/decade, mentre la fase sale di 90° corrispondentemente. C'è quindi uno zero nel semipiano sinistro.
- A $\omega = 10$, il modulo decrementa la pendenza di 40dB/decade, mentre la fase scende di 180° corrispondentemente. Ci sono quindi due poli nel semipiano sinistro.

Dato che sono presenti 3 poli nel semipiano sinistro, e il sistema è di ordine 3, si può concludere che il sistema è asintoticamente stabile.

Per tracciare la risposta allo scalino del sistema osserviamo che:

- Il guadagno statico del sistema è 10 dato che in bassa frequenza il diagramma di Bode del modulo è pari a 20dB e la fase è pari a 0° .
- Il polo dominante del sistema è $p_1 = -0.5$, per cui il tempo di assestamento è di circa $T_a = 5/|p_1| = 10$ unità di tempo.
- Non ci sono picchi di risonanza.
- Non ci sono bande di frequenze per cui il modulo della risposta in frequenza di $G(s)$ è maggiore del guadagno statico.
- Il sistema è strettamente proprio.

Da queste osservazioni si può tracciare la risposta allo scalino unitario del sistema, come mostrato in Figura 8.

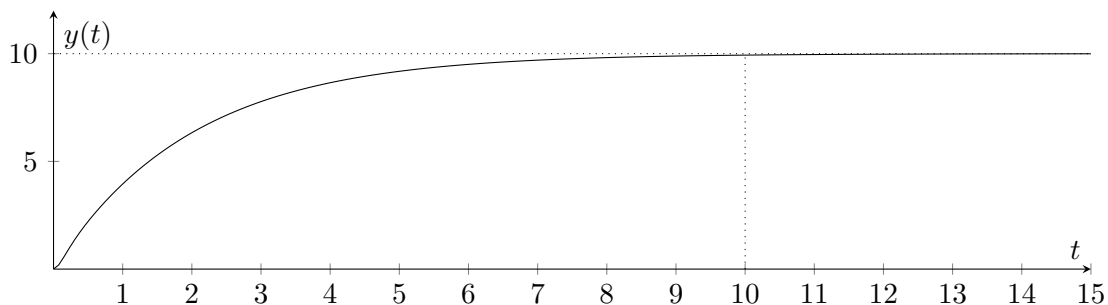


Figura 8: Risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

2. L'espressione analitica della risposta di regime del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ a fronte dell'ingresso $u(t) = \sin(100t) + \cos(0.01t)$ si può calcolare applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e il teorema della risposta in frequenza.

- Consideriamo $u_1(t) = \sin(100t)$:

$$y_{\infty,1}(t) = |G(j100)| \sin(100t + \angle G(j100)).$$

Dal diagramma di Bode di Figura 5 possiamo vedere che:

$$\begin{aligned} |G(j100)|_{\text{dB}} \simeq -40\text{dB} &\Rightarrow |G(j100)| \simeq 0.01 \\ \angle G(j100) \simeq -180^\circ. \end{aligned}$$

Quindi:

$$y_{\infty,1}(t) = 0.01 \sin(100t - \pi) = -0.01 \sin(100t)$$

- Consideriamo $u_2(t) = \cos(0.01t)$:

$$y_{\infty,2}(t) = |G(j0.01)| \cos(0.01t + \angle G(j0.01)).$$

Dal diagramma di Bode di Figura 5 possiamo vedere che:

$$\begin{aligned} |G(j0.01)|_{\text{dB}} \simeq 20\text{dB} &\Rightarrow |G(j0.01)| \simeq 10 \\ \angle G(j0.01) \simeq 0^\circ. \end{aligned}$$

Quindi:

$$y_{\infty,2}(t) = 10 \cos(0.01t).$$

per cui:

$$y_{\infty}(t) = -0.01 \sin(100t) + 10 \cos(0.01t)$$

3. Procediamo per punti.

(a) Per verificare l'asintotica stabilità del sistema si può applicare il criterio di Bode. Verifichiamo, innanzitutto che le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode sono soddisfatte.

- Il sistema in questione ha più poli che zeri, per cui è strettamente proprio.
- $G(s)$ non ha poli con parte reale positiva.
- La pulsazione critica è ben definita, in quanto il diagramma di Bode del modulo (reale) attraversa l'asse 0dB una e una sola volta dall'alto verso il basso.

Si può quindi applicare il criterio di Bode per valutare la stabilità del sistema retroazionato:

- $\mu_G = 10 > 0$,
- $\varphi_m \simeq 90^\circ > 0^\circ$.

Si conclude che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Alternativamente, si poteva applicare il criterio di Nyquist. A partire dai diagrammi di Bode di $G(s)$, è possibile tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$, come mostrato in Figura 9.

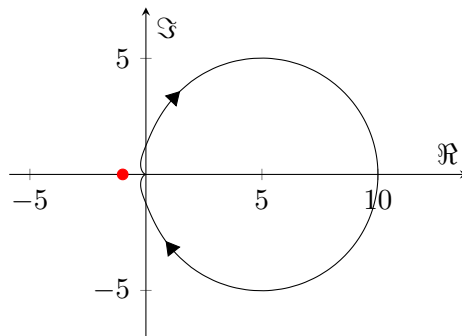


Figura 9: Diagramma di Nyquist di $G(s)$.

Dato che non ci sono poli nel semipiano destro ($P = 0$) e il diagramma di Nyquist non compie giri intorno al punto -1 sul semiasse reale negativo ($N = 0$), allora si può concludere che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

(b) L'espressione analitica della risposta di regime del sistema retroazionato all'ingresso $y^\circ(t) = 10 + \sin(100t)$ si ottiene, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come segue:

- $y_1^\circ(t) = 10$:

$$y_{\infty,1}(t) = F(0) \cdot 10 = \frac{G(0)}{1 + G(0)} \cdot 10 = \frac{100}{11}$$

- $y_2^\circ(t) = \sin(100t)$:

$$y_{\infty,2}(t) = |F(j100)| \sin(100t + \angle F(j100))$$

osservando che la funzione di trasferimento $F(s)$ da $y^\circ(t)$ a $y(t)$ si può approssimare come:

$$|F(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ |G(j\omega)|, & \omega > \omega_c \end{cases}$$

e dato che $\omega_c < 100$, dal diagramma di Bode del modulo in Figura 5 si può vedere che:

$$\begin{aligned} |F(j100)| &= |G(j100)| = 0.01 \\ \angle F(j100) &= \angle G(j100) \simeq -180^\circ \end{aligned}$$

per cui:

$$y_{\infty,2}(t) = 0.01 \sin(100t - \pi) = -0.01 \sin(100t)$$

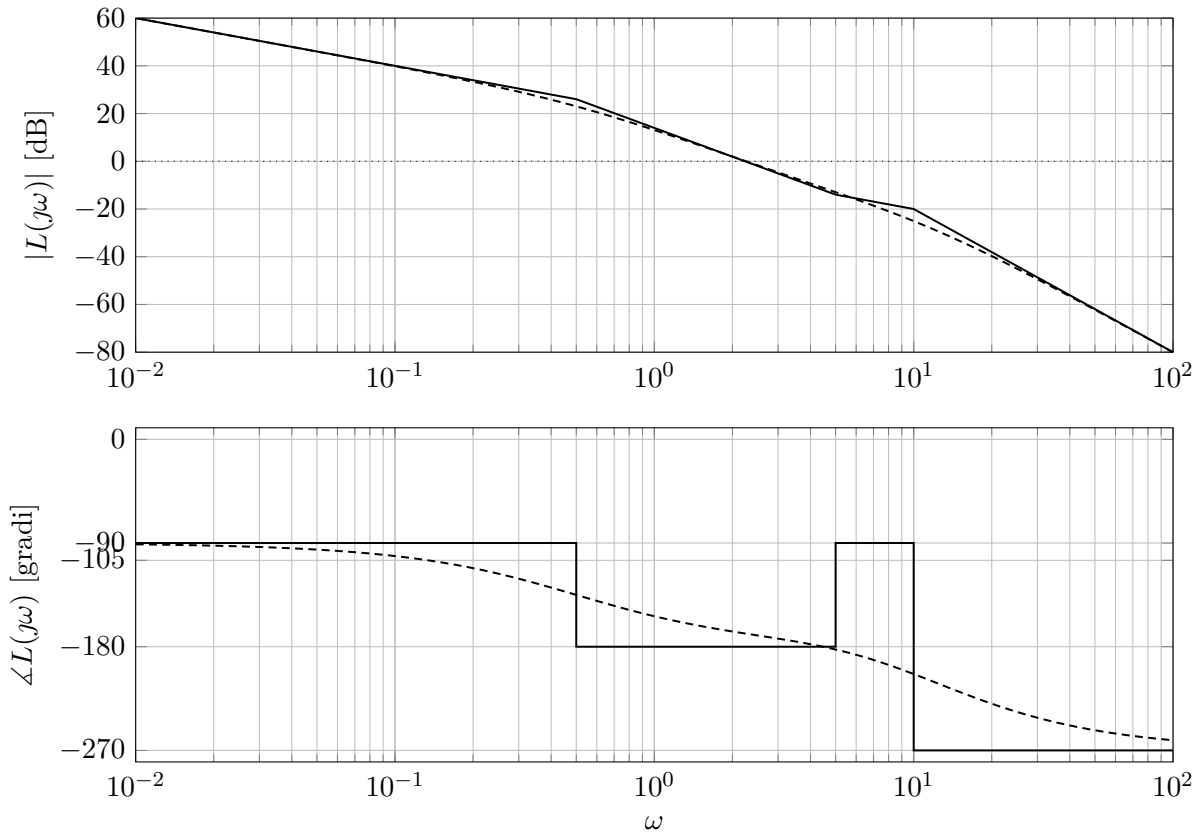
Quindi:

$$y_\infty(t) = \frac{100}{11} - 0.01 \sin(100t)$$

Dato che il margine di fase φ_m è maggiore di 75° , la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso si può approssimare con un sistema del primo ordine con un singolo polo in ω_c , allora il tempo di assestamento necessario per assestarsi al valore di regime è di circa $T_a = 5/\omega_c \simeq 1$ dato che $\omega_c \simeq 5$.

4. Consideriamo i due regolatori separatamente:

- (a) Se $R(s) = k$, $k > 1$, vuol dire che il diagramma di Bode del modulo mostrato in Figura 5 viene alzato, con un conseguente incremento della pulsazione critica. Il criterio di Bode continua ad essere applicabile, per cui, per $k > 1$ la condizione sul guadagno della funzione d'anello è sempre soddisfatta, e lo stesso vale per la condizione sul margine di fase. Infatti, il regolatore $R(s) = k$ non influenza la fase che rimane uguale a quella di $G(s)$. Dato che essa è sempre maggiore di -180° per qualunque valore di ω , si può concludere per il criterio di Bode che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile $\forall k > 1$.
- (b) Se $R(s) = \frac{k}{s}$, $k > 1$, vuol dire che la fase parte da -90° e non più da 0° . Il criterio di Bode continua ad essere applicabile, ma esiste un valore limite $\bar{\omega}$ oltre il quale il margine di fase diventa minore o uguale a 0. Si può trovare graficamente il valore limite, analizzando quando il diagramma di Bode di $G(s)$ assume il valore -90° (si veda Figura 5). Il valore limite è quindi $4 < \bar{\omega} < 5$. Il diagramma di Bode del modulo di $L(s) = R(s)G(s)$ per $k = 1$ è mostrato in Figura 10.

Figura 10: Diagramma di Bode di $L(s) = G(s)/s$.

Dal diagramma di Bode del modulo è possibile vedere che $2 < \omega_c < 3$, ma in particolare che $\omega_c < \bar{\omega}$. Per cui per valori di $k > 1$ è possibile alzare ω_c fino a raggiungere il valore $\bar{\omega}$, oltre il quale il sistema non è più asintoticamente stabile.

Se volessimo calcolare precisamente il valore limite di k (cosa non richiesta dall'esercizio) dovremmo procedere per via analitica.

A partire dai diagrammi di Bode si può ricavare che la funzione di trasferimento $G(s)$ è:

$$G(s) = \frac{10(1 + s/5)}{(1 + 2s)(1 + s/10)^2}$$

Per cui possiamo calcolare il valore $\bar{\omega}$ come:

$$\begin{aligned} \arctan(\bar{\omega}/5) - \arctan(2\bar{\omega}) - 2 \arctan(\bar{\omega}/10) &= -90^\circ \\ \arctan\left(\frac{\bar{\omega}/5 - 2\bar{\omega}}{1 + 2/5\bar{\omega}^2}\right) - \arctan\left(\frac{1/5\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2/100}\right) &= -90^\circ \\ \arctan\left(\frac{-\frac{9}{5}\bar{\omega}}{1 + \frac{2}{5}\bar{\omega}^2}\right) - \arctan\left(\frac{\frac{1}{5}\bar{\omega}}{1 - \frac{1}{100}\bar{\omega}^2}\right) &= -90^\circ \\ \arctan\left(\frac{-9\bar{\omega}}{5 + 2\bar{\omega}^2}\right) - \arctan\left(\frac{20\bar{\omega}}{100 - \bar{\omega}^2}\right) &= -90^\circ \end{aligned}$$

Questa uguaglianza è vera quando il prodotto dei due argomenti è uguale a -1 , per cui

vale che:

$$\begin{aligned}
 \frac{-9\bar{\omega}}{5+2\bar{\omega}^2} \cdot \frac{20\bar{\omega}}{100-\bar{\omega}^2} &= -1 \\
 180\bar{\omega}^2 &= (5+2\bar{\omega}^2)(100-\bar{\omega}^2) \\
 180\bar{\omega}^2 &= 500+200\bar{\omega}^2-5\bar{\omega}^2-2\bar{\omega}^4 \\
 180\bar{\omega}^2 &= 500+200\bar{\omega}^2-5\bar{\omega}^2-2\bar{\omega}^4 \\
 2\bar{\omega}^4-15\bar{\omega}^2-500 &= 0 \\
 \bar{\omega}_{1,2}^2 &= \frac{15 \pm \sqrt{15^2+4000}}{4} = \frac{15 \pm 65}{4} = \begin{cases} 20 \\ -\frac{25}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\bar{\omega} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ora si può calcolare il valore limite di k imponendo che $|R(j\bar{\omega})G(j\bar{\omega})| = 1$, ossia:

$$\begin{aligned}
 |R(j\bar{\omega})G(j\bar{\omega})| &= \frac{10k}{|\bar{\omega}|} \cdot \frac{|1+\bar{\omega}/5|}{|1+2\bar{\omega}| \cdot |1+\bar{\omega}/10|^2} \\
 &= \frac{10k}{\bar{\omega}} \cdot \frac{\sqrt{1+(\bar{\omega}/5)^2}}{\sqrt{1+(2\bar{\omega})^2} \cdot \sqrt{1+(\bar{\omega}/10)^2}} \\
 &= \frac{10k}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{1+4/5}}{\sqrt{1+80} \cdot (1+1/5)} \\
 &= \frac{5k}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\frac{3}{5}\sqrt{5}}{9 \cdot \frac{6}{5}} \\
 &= \frac{5k}{18}
 \end{aligned}$$

Quindi il valore limite di k è

$$\frac{5\bar{k}}{18} = 1, \quad \Rightarrow \quad \bar{k} = \frac{18}{5} = 3.6$$

3 Controllore digitale

Dato il sistema di controllo a tempo continuo in retroazione come mostrato in Figura 11

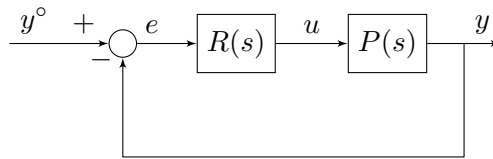


Figura 11: Schema di controllo.

in cui il processo e il regolatore sono rispettivamente descritti dalle funzioni di trasferimento:

$$P(s) = \frac{0.5}{s(1 + 0.01s)}, \quad R(s) = 2 \cdot \frac{1 + 10s}{s}$$

e dovendo realizzare il regolatore con tecnologia digitale:

1. Determinare il tempo di campionamento T_s in modo che la pulsazione di campionamento ω_s sia superiore di almeno una decade alla pulsazione critica ω_c , che il decremento del margine di fase φ_m dovuto a:
 - Campionamento,
 - Tempo di calcolo $\tau_{\text{comp}} = 5\text{ms}$,
 - Filtro antialiasing con banda pari a 10 volte la banda del sistema in anello chiuso,
 non ecceda 9° .
2. Calcolare la funzione di trasferimento $R^*(z)$ del regolatore a tempo discreto ottenuto da $R(s)$ col metodo di Eulero esplicito e con il valore di T_s determinato.
3. Esprimere la corrispondente legge di controllo a tempo discreto.

Soluzione

1. Per determinare il tempo di campionamento T_s bisogna prima calcolare quanto vale la pulsazione di taglio ω_c . Per questo si possono tracciare i diagrammi di bode di

$$\begin{aligned} L(s) = R(s)P(s) &= 2 \cdot \frac{1 + 10s}{s} \cdot \frac{0.5}{s(1 + 0.01s)} \\ &= \frac{1 + 10s}{s^2(1 + 0.01s)} \end{aligned}$$

come mostrato in Figura 12.

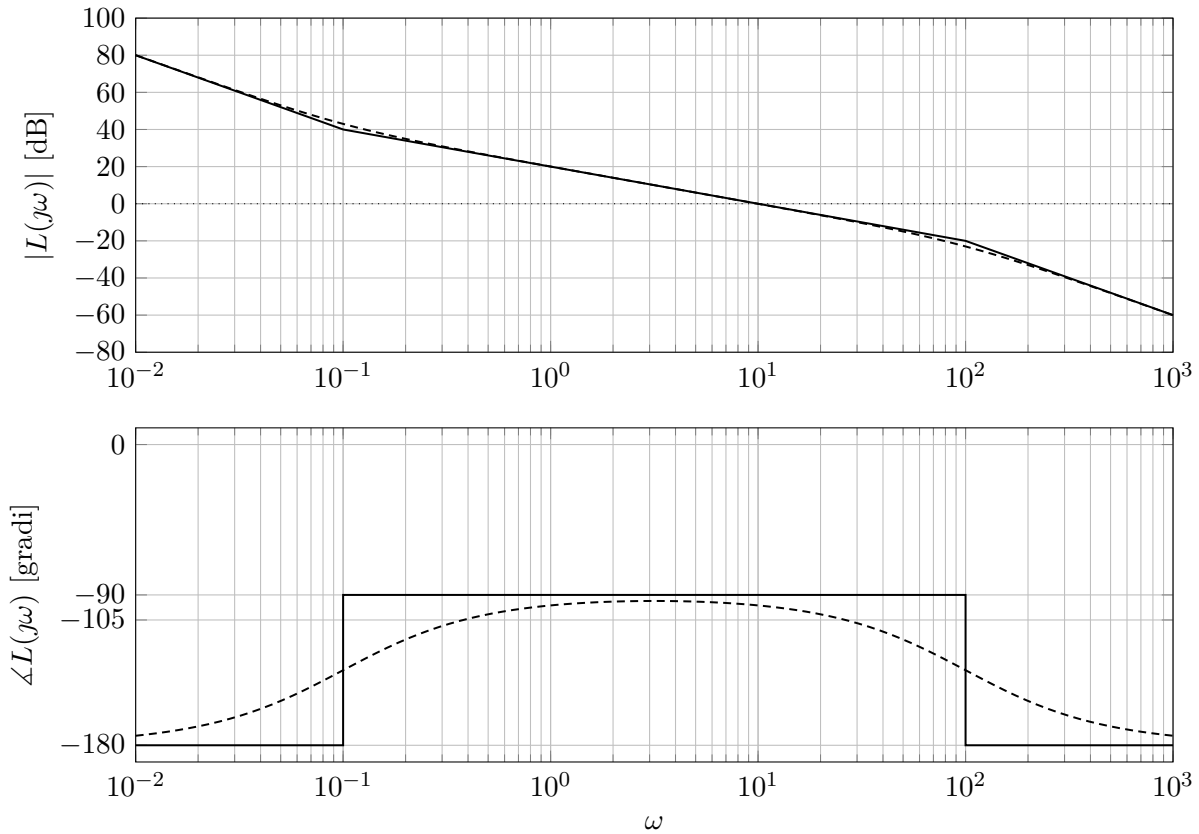


Figura 12: Diagramma di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a $L(s)$.

Dal grafico è possibile vedere che $\omega_c \simeq 10$. Il margine di fase φ_m è maggiore di 75° .

È quindi ora possibile calcolare il contributo di decremento di fase associato a:

- **Campionamento**, che contribuisce come un ritardo $e^{-sT_s/2}$ sulla funzione d'anello:

$$\Delta\varphi_{m,s} = -\frac{T_s}{2}\omega_c \cdot \frac{180}{\pi} = -\frac{900}{\pi}T_s$$

- **Tempo di calcolo**, che contribuisce come un ritardo $e^{-s\tau_{\text{comp}}}$ sulla funzione d'anello:

$$\Delta\varphi_{m,\text{comp}} = -\tau_{\text{comp}}\omega_c \cdot \frac{180}{\pi} = -\frac{9}{\pi} \simeq -2.865^\circ$$

- **Filtro antialiasing**, che contribuisce come una funzione di trasferimento in serie a $L(s)$ con guadagno unitario e un polo a $\omega_a = 10\omega_c$, per cui si ha che il contributo di fase a ω_c è:

$$\Delta\varphi_{m,a} = -\arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_a}\right) = -\arctan(0.1) = -5.711^\circ$$

Dato che lo sfasamento totale non deve eccedere $\overline{\Delta\varphi_m} = -9^\circ$, ed è composto dalla somma dei tre contributi, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\varphi_m} &\leq \Delta\varphi_{m,s} + \Delta\varphi_{m,\text{comp}} + \Delta\varphi_{m,a} \\ \Delta\varphi_{m,s} &\geq \overline{\Delta\varphi_m} - \Delta\varphi_{m,\text{comp}} + \Delta\varphi_{m,a} \\ -\frac{900}{\pi}T_s &\geq -9^\circ - (-2.865^\circ - 5.711^\circ) \\ T_s &\leq \frac{0.424}{900}\pi \simeq 0.0015 \end{aligned}$$

Possiamo quindi selezionare $T_s = 0.001$. Il decremento di margine di fase è quindi:

$$\Delta\varphi_m = -\frac{0.001}{2} \cdot 10 \cdot \frac{180}{\pi} + \Delta\varphi_{m,\text{comp}} + \Delta\varphi_{m,a} = -8.863^\circ$$

2. Per calcolare la funzione di trasferimento $R^*(z)$ a partire da $R(s)$ con il metodo di Eulero esplicito, basta fare la seguente sostituzione nell'espressione di $R(s)$:

$$s = \frac{z-1}{T_s} = 1000(z-1).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} R^*(z) &= R(s)|_{s=1000(z-1)} = 2 \cdot \frac{1 + 10 \cdot (1000(z-1))}{1000(z-1)} \\ &= 2 \cdot \frac{1 + 10000z - 10000}{1000(z-1)} = 2 \cdot \frac{10z - 9999/1000}{z-1} \end{aligned}$$

3. La corrispondente legge di controllo a tempo discreto è:

$$\begin{aligned} R^*(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = 2 \cdot \frac{10z - 9999/1000}{z-1} \\ U(z)(z-1) &= 2E(z)(10z - 9999/1000) \end{aligned}$$

che può essere antitrasformata come:

$$\begin{aligned} u(k+1) - u(k) &= 20e(k+1) - 9999/500e(k) \\ u(k+1) &= u(k) + 20e(k+1) - 9999/500e(k) \\ u(k) &= u(k-1) + 20e(k) - 9999/500e(k-1) \end{aligned}$$

4 Progetto del controllore

Si consideri il sistema di controllo mostrato in Figura 13.

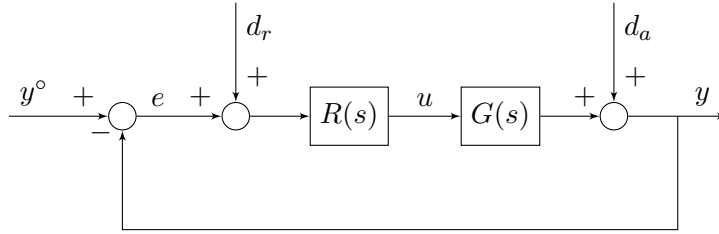


Figura 13: Schema di controllo.

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{2s}$$

e i segnali indicati valgono:

$$\begin{aligned} y^o(t) &= 2 \operatorname{sca}(t), \\ d_a(t) &= -0.1 \operatorname{sca}(t), \\ d_r(t) &= A_r \sin(\omega_r t), \quad |A_r| < 10, \omega_r > 20. \end{aligned}$$

Determinare un regolatore $R(s)$ tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e che:

1. l'errore a transitorio esaurito prodotto da $y^o(t)$ e $d_a(t)$ sia nullo,
2. la pulsazione critica ω_c sia compresa tra 0.1 e 1 rad/s,
3. il margine di fase φ_m sia di almeno 45° ,
4. l'ampiezza dell'effetto asintoticamente prodotto dal disturbo $d_r(t)$ su $y(t)$ non superi 0.1.

Soluzione

Progetto statico Partiamo con il considerare il regolatore:

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}.$$

Viene richiesto che l'errore a transitorio esaurito dovuto da $y^o(t)$ e da $d_a(t)$ sia nullo. Per cui:

- Consideriamo il contributo legato a $y^o(t) = 2 \operatorname{sca}(t)$:

$$\begin{aligned} e_{\infty, y^o} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s E_{y^o}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{2}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{\mu_R}{s^{g_R}} \cdot \frac{0.5}{s}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^{g_R+1}}{s^{g_R+1} + 0.5\mu_R} \end{aligned}$$

che è pari a 0 per $g_R \geq 0, \forall \mu_R$.

- Consideriamo il contributo legato a $d_a(t) = -0.1 \operatorname{sca}(t)$:

$$\begin{aligned} e_{\infty, d_a} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s E_{d_a}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{-1}{1 + L(s)} \frac{-0.1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{0.1}{1 + \frac{\mu_R}{s^{g_R}} \cdot \frac{0.5}{s}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{0.1s^{g_R+1}}{s^{g_R+1} + 0.5\mu_R} \end{aligned}$$

che è pari a 0 per $g_R \geq 0, \forall \mu_R$.

I vincoli di attenuazione del disturbo d_r si traducono in vincoli sulla $L(s)$. In particolare, la funzione di trasferimento da d_r a y è:

$$\frac{Y(s)}{D_r(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$

per cui il vincolo si traduce come:

$$10|F(j\omega_r)| \leq 0.1, \quad |F(j\omega_r)| \leq 0.01, \quad \omega_r > 20$$

Dato che $|F(j\omega)|$ si può approssimare in alta frequenza (dove agisce il disturbo e oltre ω_c) come $|L(j\omega)|$, il vincolo diventa:

$$|L(j\omega_r)| \leq 0.01, \quad |L(j\omega_r)|_{\text{dB}} \leq -40\text{dB}, \quad \omega_r > 20.$$

Possiamo quindi selezionare $R_1(s) = 1$, tenendo presente che è possibile cambiare il valore di μ_R in fase di progetto dinamico.

Progetto dinamico Tracciamo il diagramma di Bode del modulo di $L_1(s) = R_1(s)G(s) = G(s)$ come mostrato in Figura 14

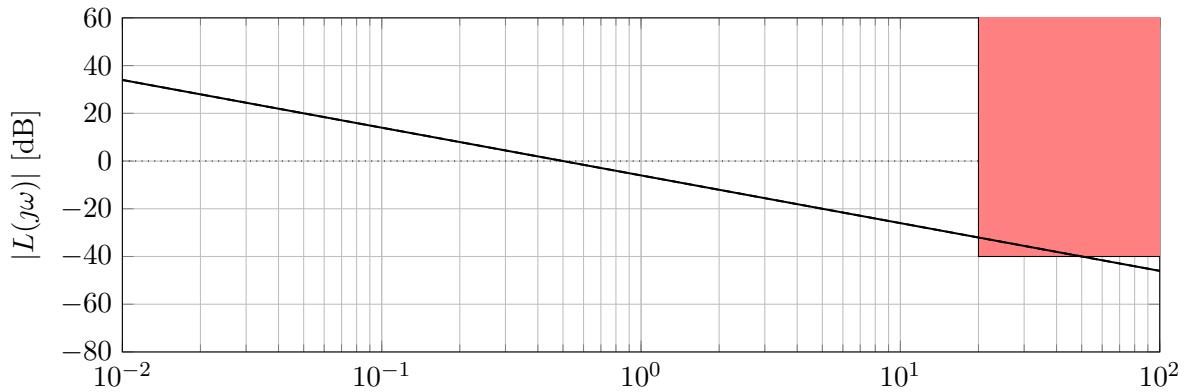


Figura 14: Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata a $L_1(s)$.

in cui è evidente che il vincolo sull'attenuazione del disturbo d_r non è rispettato. Inoltre se calcolassimo il margine, osservando che $\omega_c = 0.5\mu_R = 0.5$ di fase otterremmo:

$$\begin{aligned} \varphi_c &= -90^\circ - 0.5 \cdot 0.5 \cdot \frac{180}{\pi} \simeq -104^\circ \\ \varphi_m &= 180^\circ - |-104^\circ| \simeq 75^\circ \end{aligned}$$

che è sufficiente per le specifiche di progetto.

L'unica cosa, quindi che si deve quindi modificare è il guadagno del regolatore. Si può fare in modo, ad esempio che a $\omega = 20$, il diagramma di Bode di $L(s)$ passi esattamente in -40dB e calcolare quanto deve valere ω_c . Graficamente, si ottiene che la ω_c deve essere minore o uguale a 0.2. Volendo massimizzare la ω_c , possiamo quindi imporre che $\omega_c = 0.2$ che si ottiene quando $0.5\mu_R = 0.2$, ossia quando $\mu_R = 0.4$.

Il margine di fase è quindi:

$$\begin{aligned} \varphi_c &= -90^\circ - 0.5 \cdot 0.2 \cdot \frac{180}{\pi} \simeq -95^\circ \\ \varphi_m &= 180^\circ - |-95^\circ| \simeq 84^\circ \end{aligned}$$

che è più che sufficiente. Tutti i vincoli di progetto sono quindi rispettati e il regolatore ottenuto è:

$$R(s) = 0.4.$$