

Fondamenti di Automatica: Esercitazioni

2016

Alessandro Vittorio Papadopoulos
alessandro.papadopoulos@polimi.it

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina

1	Algebra delle matrici e numeri complessi	5
1.1	Definizioni di base	5
1.2	Determinante di una matrice (quadrata)	5
1.2.1	Proprietà del determinante	5
1.3	Rango di matrici (rettangolari)	6
1.4	Matrice inversa (o reciproca)	6
1.4.1	Calcolo della matrice inversa	6
1.4.2	Esempio nel caso di matrice 2×2	6
1.4.3	Proprietà della matrice inversa	7
1.5	Polinomio caratteristico	8
1.6	Autovalori e autovettori	8
1.6.1	Proprietà degli autovalori	9
1.6.2	Proprietà degli autovettori	9
1.7	Similitudine e diagonalizzabilità	10
1.8	Esponenziale di matrice	12
1.8.1	Diagonalizzabilità dell'esponenziale	14
1.9	Numeri complessi	15
1.9.1	Inverso moltiplicativo	15
1.10	Rappresentazione polare	16
1.11	Esponenziale trigonometrico	16
1.11.1	Formula di Eulero	17
1.11.2	Utili espressioni trigonometriche	17
2	Analisi di sistemi dinamici: movimenti ed equilibri	19
2.1	Sistema massa-molla-smorzatore	19
2.2	Circuito RC	20
3	Sistemi a tempo discreto	21
3.1	Analisi di investimenti	21
3.2	Prestito	21
3.3	Modello degli studenti universitari	21
3.4	Il ranking di Google: PageRank (semplificato)	22
3.5	Popolazioni animali	22
4	Stabilità dei sistemi dinamici e sistemi interconnessi	23
4.1	Sistema lineare (non osservabile)	23
4.2	Sistemi interconnessi	23
4.3	Sistema non lineare	24

4.4	Modello di crescita logistica di Verhulst	24
4.5	Pendolo inverso	26
5	Trasformata di Laplace e funzione di trasferimento	27
5.1	Risposta allo scalino	27
5.2	Stabilità e funzione di trasferimento	27
5.3	Risposta all'esponenziale	27
5.4	Movimento del sistema	28
5.5	Poli multipli	28
5.6	Sistema a fase non minima	28
6	Sistemi interconnessi e funzioni di trasferimento	29
6.1	Schema a blocchi	29
6.2	Schemi a blocchi	29
6.3	Schema a blocchi	30
6.4	Schema a blocchi	30
6.5	Schema a blocchi	30
6.6	Schema a blocchi	31
6.7	Schemi a blocchi	31
7	Ripasso I prova in Itinere	33
7.1	Sistemi a tempo discreto	33
7.2	Sistemi non lineari a tempo continuo (1)	33
7.3	Sistemi non lineari a tempo continuo (2)	34
7.4	Schemi a blocchi e funzioni di trasferimento	34
7.5	Sistemi lineari a tempo continuo	35
7.6	Funzioni di trasferimento, approssimazioni ai poli dominanti, risposte qualitative	35
8	Risposta in frequenza	37
8.1	Tracciamento diagrammi di Bode	37
8.2	Tracciamento diagrammi di Bode con poli complessi coniugati	37
8.3	Risposta in frequenza	37
8.4	Analisi diagrammi di Bode	38
8.5	Risposta a diversi ingressi	38
8.6	Analisi sistema di controllo	39
9	Analisi di stabilità dei sistemi di controllo	41
9.1	Cruise control	41
9.2	Analisi di stabilità	42
9.3	Analisi di stabilità	42
9.4	Analisi di stabilità	43
9.5	Analisi di stabilità	43
10	Prestazioni dei sistemi di controllo	45
10.1	Analisi delle prestazioni del cruise control	45
10.2	Analisi delle prestazioni	45
10.3	Analisi delle prestazioni	46
11	Sintesi del controllore	49
11.1	Sistema a fase minima	49
11.2	Processo a fase non minima	49
11.3	Sistema con ritardo	50
11.4	Disturbi Fourier trasformabili	50

12 Ripasso	51
12.1 Sistema non lineare	51
12.2 Schemi a blocchi	52
12.3 Sistema in anello aperto	52
12.4 Sistema a fase non minima	53
12.5 Integratore nel processo	53
13 Ripasso II prova in itinere	55
13.1 Analisi prestazioni	55
13.2 Sistema in anello aperto	57
13.3 Controllore digitale	59
13.4 Progetto del controllore	60

1.1 Definizioni di base

Definizione 1.1 (Matrice $(m \times n)$). *Tabella di m righe ed n colonne*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Definizione 1.2 (Vettore (colonna) $(m \times 1)$).

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad b_i \in \mathbb{R}$$

Diamo per scontati i concetti di *somma* e *differenza* di matrici, di *prodotto di una matrice per uno scalare*, di *prodotto di matrici*, di *trasposta di una matrice* e di *determinante* di una matrice quadrata.

1.2 Determinante di una matrice (quadrata)

Definizione 1.3 (Complemento algebrico). *Data una matrice A $n \times n$, si dice complemento algebrico (o cofattore) di a_{ij} il determinante Δ_{ij} della sottomatrice di A ottenuta eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.*

Il calcolo è definito in modo ricorsivo:

1. $\det(a) = a$
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}$

1.2.1 Proprietà del determinante

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, se A e B sono matrici quadrate

Se $\det(A) = 0$, A si dice **matrice singolare** (non invertibile).

1.3 Rango di matrici (rettangolari)

Definizione 1.4 (Rango). *Il rango di una matrice (rettangolare) A , $\text{rank}(A)$, è l'ordine della sottomatrice quadrata di A non singolare di ordine massimo.*

Il rango corrisponde al numero massimo di righe (e colonne) linearmente indipendenti tra loro.

Definizione 1.5 (Vettori linearmente indipendenti). *Dati n vettori v_1, v_2, \dots, v_n , essi si dicono linearmente indipendenti se e solo se $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ scalari*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \neq 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Definizione 1.6 (Vettori linearmente dipendenti). *Dati n vettori v_1, v_2, \dots, v_n , essi si dicono linearmente dipendenti se e solo se $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ scalari, tali che:*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

1.4 Matrice inversa (o reciproca)

Definizione 1.7 (Matrice inversa). *Data una matrice quadrata A $n \times n$, la sua matrice inversa A^{-1} , se esiste, è una matrice $n \times n$ tale che*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Teorema 1.8. *Condizione Necessaria e Sufficiente (CNS) per l'esistenza della matrice inversa di A è che la matrice A sia non singolare (cioè che il determinante di A sia non nullo):*

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Di seguito indicheremo con c_{ij} l'elemento sulla riga i -esima e sulla colonna j -esima di una matrice C .

1.4.1 Calcolo della matrice inversa

Data una matrice A $n \times n$ non singolare, l'elemento b_{ij} della sua matrice inversa $B = A^{-1}$ si calcola nel modo seguente

$$b_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det A}$$

dove Δ_{ji} è il complemento algebrico di a_{ji} .

1.4.2 Esempio nel caso di matrice 2×2

Data una matrice A 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

la sua inversa è:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Dimostrazione. La matrice inversa di A

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

ha come elementi

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\det A} = (-1)^{1+1} \frac{a_{22}}{\det A} = \frac{a_{22}}{\det A} \\ b_{12} &= \frac{\Delta_{21}}{\det A} = (-1)^{1+2} \frac{a_{12}}{\det A} = -\frac{a_{12}}{\det A} \\ b_{21} &= \frac{\Delta_{12}}{\det A} = (-1)^{2+1} \frac{a_{21}}{\det A} = -\frac{a_{21}}{\det A} \\ b_{22} &= \frac{\Delta_{22}}{\det A} = (-1)^{2+2} \frac{a_{11}}{\det A} = \frac{a_{11}}{\det A} \end{aligned}$$

dove

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

□

Esempio

Calcolare la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Basta applicare la formula (1.9). Quindi si può calcolare

$$\frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{0 \cdot 3 - 2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

e moltiplicarlo per una matrice ottenuta da A scambiando tra di loro gli elementi sulla diagonale principale e invertendo il segno degli elementi fuori dalla diagonale principale. Si ottiene, quindi

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.4.3 Proprietà della matrice inversa

Date due matrici quadrate A e B , valgono le seguenti proprietà:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. se A è una matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

6. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

1.5 Polinomio caratteristico

Definizione 1.10 (Polinomio caratteristico). *Il polinomio caratteristico di una matrice A $n \times n$ è il polinomio di grado n nella variabile complessa λ*

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Definizione 1.11 (Equazione caratteristica). *L'equazione caratteristica è l'equazione*

$$p_A(\lambda) = 0$$

Esempio

Calcolare il polinomio e l'equazione caratteristica della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Calcoliamo

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

da cui possiamo ricavare il polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

L'equazione caratteristica è quindi

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

1.6 Autovalori e autovettori

Definizione 1.12 (Autovalori e autovettori). $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice *autovalore* di una matrice A $n \times n$ se esiste un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ con $v \neq 0$ tale che

$$Av = \lambda v.$$

v è detto *autovettore* di A associato a λ .

Da questo segue che

1. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Dimostrazione. λ è autovalore se esiste $v \neq 0$ tale che $Av = \lambda v$. Questa equazione è equivalente a

$$(\lambda I - A)v = 0$$

che ha soluzioni diverse da $v = 0$ se e solo se $\det(\lambda I - A) = 0$. □

2. Il numero degli autovalori è $\mu \leq n$, $\mu \in \mathbb{N}$
3. Ogni autovalore compare n_i volte nell'equazione caratteristica, cioè:

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{\mu} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

4. n_i è la **molteplicità algebrica** di λ_i

Esempio

Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

L'equazione caratteristica di A calcolata nell'esempio precedente

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

consente di determinare gli autovalori di A :

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

1.6.1 Proprietà degli autovalori

Data una matrice A $n \times n$ con elementi reali, valgono le seguenti proprietà

1. La matrice A ha μ autovalori, ognuno con molteplicità algebrica n_i , $i = 1, \dots, \mu$
2. $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$, ossia la matrice A di ordine n ha n autovalori in campo complesso, ognuno contato con la sua molteplicità algebrica
3. Gli autovalori sono reali oppure complessi e coniugati
4. $\det A = \prod_{i=1}^{\mu} (\lambda_i)^{n_i} = \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_{\mu}^{n_{\mu}}$

- Di conseguenza

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists i : \lambda_i = 0$$

5. A triangolare (o diagonale) $\Rightarrow \lambda_i = a_{ii}$
6. Se λ è autovalore di $A \Rightarrow \lambda^{-1}$ è autovalore di A^{-1}
7. La traccia della matrice A è uguale alla somma degli autovalori di A

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^{\mu} n_i \lambda_i$$

1.6.2 Proprietà degli autovettori

- v_i è autovettore o **autospazio** associato a λ_i
- La dimensione (numero di gradi di libertà) dell'autospazio v_i è $1 \leq g_i \leq n_i$ e si chiama **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ_i
- La molteplicità geometrica è data da:

$$g_i := n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)$$

Esempio

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono $\mu = 2$:

1. $\lambda_1 = 1$, con molteplicità algebrica $n_1 = 2$ e molteplicità geometrica

$$g_1 = n - \text{rank}(I - A) = 3 - \text{rank} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 3 - 1 = 2$$

2. $\lambda_2 = -1$, con molteplicità algebrica $n_2 = 1$ e molteplicità geometrica

$$g_2 = n - \text{rank}(I - A) = 3 - \text{rank} \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right) = 3 - 2 = 1$$

In questo caso la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica dei due autovalori.

1.7 Similitudine e diagonalizzabilità

Definizione 1.13 (Similitudine). *Due matrici quadrate A e B , entrambe $n \times n$, si dicono simili se esiste una matrice non singolare $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che*

$$B = TAT^{-1} \quad (\text{Trasformazione di similitudine})$$

Teorema 1.14. *Gli autovalori di matrici simili coincidono.*

Dimostrazione. Siano A e B due matrici simili. Gli autovalori di $B = TAT^{-1}$ si ottengono come

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \det(\lambda I - TAT^{-1}) = \det(T\lambda IT^{-1} - TAT^{-1}) = \det(T(\lambda I - A)T^{-1}) \\ &= [\det(T)] [\det(\lambda I - A)] [\det(T^{-1})] \\ &= \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

□

Definizione 1.15 (Diagonalizzabilità). *Data una matrice A ($n \times n$), essa è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, cioè se esiste una matrice T non singolare tale che TAT^{-1} sia diagonale.*

Valgono alcune proprietà:

1. A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow A$ ammette n autovettori $\{v_1, v_2, \dots, v_\mu\}$ linearmente indipendenti. Inoltre, la matrice T di trasformazione che pone A in forma diagonale ha inversa data da

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_\mu \end{bmatrix}$$

dove il numero di colonne di v_i è pari a g_i .

2. A è diagonalizzabile se e solo se $\forall \lambda_i, i = 1, \dots, \mu$

$$n_i = g_i, \quad \forall i = 1, \dots, \mu$$

3. Di conseguenza si ha che se A ha n autovalori distinti (ossia $\mu = n$) $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile

Esempio

Verificare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e calcolare la matrice di similitudine per porla in forma diagonale.

Soluzione

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) + 0 + 0 - (0 + 0 + (\lambda + 1)) = \\ &= ((\lambda - 2)^2 - 1)(\lambda + 1) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1)(\lambda + 1) = \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Dato che gli $\mu = 3$ autovalori calcolati sono distinti, la matrice è diagonalizzabile.

Calcoliamo quindi gli autovettori associati agli autovalori

- $\lambda_1 = 3$

$$\begin{aligned} Av_1 = 3v_1 &\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \\ \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3\alpha \\ \alpha + 2\beta = 3\beta \\ -\gamma = 3\gamma \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \alpha = 3\alpha \\ \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si può quindi scegliere un qualunque valore per α e ottenere un autovettore associato a λ_1 . Scegliamo $\alpha = 1$ e otteniamo l'autovettore

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 1$

$$\begin{aligned} Av_2 = v_2 &\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \\ \begin{cases} 2\alpha + \beta = \alpha \\ \alpha + 2\beta = \beta \\ -\gamma = \gamma \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \alpha = \alpha \\ \beta = -\alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si può quindi scegliere un qualunque valore per α e ottenere un autovettore associato a λ_2 . Scegliamo $\alpha = 1$ e otteniamo l'autovettore

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_3 = -1$

$$Av_3 = -v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -\alpha \\ \alpha + 2\beta = -\beta \\ -\gamma = -\gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ \alpha - 6\alpha = -3\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma \end{cases}$$

Si può quindi scegliere un qualunque valore per γ e ottenere un autovettore associato a λ_3 . Scegliamo $\gamma = 1$ e otteniamo l'autovettore

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ora possiamo ricavare la matrice di similitudine

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(T^{-1}) = 3, \quad T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e diagonalizzare la matrice A

$$A_d = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Osservazione 1. Se avessimo scelto altri autovettori il risultato sarebbe stato lo stesso.

Osservazione 2. L'ordine con cui gli autovettori sono accostati per ottenere la matrice di similitudine, definisce l'ordine con cui appaiono gli autovalori nella matrice diagonalizzata A_d .

Esercizio

Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio

Dimostrare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

1.8 Esponenziale di matrice

Data la matrice A $n \times n$, l'esponenziale della matrice $A \cdot t$ è definito come

$$e^{A \cdot t} := I + A \cdot t + \frac{1}{2!}(A \cdot t)^2 + \frac{1}{3!}(A \cdot t)^3 + \dots + \frac{1}{k!}(A \cdot t)^k + \dots$$

con I matrice identità di dimensione $n \times n$.

Da notare che

$$\begin{aligned} (At)^2 &= At \cdot At = A \cdot At^2 = A^2t^2 \\ (At)^3 &= At \cdot At \cdot At = A \cdot A \cdot At^3 = A^3t^3 \\ &\vdots \\ (At)^k &= A^k t^k \end{aligned}$$

Inoltre, la derivata rispetto al tempo dell'esponenziale della matrice $A \cdot t$ è

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

in analogia con il caso scalare.

Osservazione 3. se $A = [a]$ è scalare

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}(at)^2 + \frac{1}{3!}(at)^3 + \dots$$

che è lo sviluppo in serie di Taylor di e^{at} attorno a $t = 0$.

Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

determinare e^{At} .

Soluzione

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 t)^2 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{1}{2!}(\lambda_1 t)^2 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t + \frac{1}{2!}(\lambda_2 t)^2 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da notare che se A è diagonale, e^{At} è anch'essa diagonale, con gli elementi sulla diagonale principale dati dagli esponenziali degli autovalori di A moltiplicati per t .

Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

determinare e^{At} .

Soluzione

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots & t \left(1 + \lambda t + \frac{1}{2!}\lambda^2 t^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 t^3 + \dots \right) \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

determinare e^{At} .

Soluzione

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t + \lambda \frac{t^2}{2!} + \lambda^2 \frac{t^3}{3!} + \dots \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \left(-1 + 1 + t + \lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \lambda^3 \frac{t^3}{3!} \dots \right) \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.8.1 Diagonalizzabilità dell'esponenziale

Se A è una matrice diagonalizzabile

$$TAT^{-1} = A_d$$

e^{At} si può ottenere come

$$e^{At} = T^{-1}e^{A_d t}T$$

con $e^{A_d t}$ matrice diagonale data da

$$e^{A_d t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Si osservi che $A = T^{-1}A_d T$. Allora

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots \\ &= T^{-1}T + T^{-1}A_d T t + \frac{1}{2!}(T^{-1}A_d T t)^2 + \frac{1}{3!}(T^{-1}A_d T t)^3 + \dots \\ &= T^{-1}T + T^{-1}A_d T t + \frac{1}{2!}T^{-1}A_d T T^{-1}A_d T t^2 + \frac{1}{3!}T^{-1}A_d T T^{-1}A_d T T^{-1}A_d T t^3 + \dots \\ &= T^{-1}T + T^{-1}A_d T t + \frac{1}{2!}T^{-1}A_d^2 T t^2 + \frac{1}{3!}T^{-1}A_d^3 T t^3 + \dots \\ &= T^{-1} \left[I + A_d t + \frac{1}{2!}(A_d t)^2 + \frac{1}{3!}(A_d t)^3 + \dots \right] T \\ &= T^{-1}e^{A_d t}T \end{aligned}$$

□

1.9 Numeri complessi

Definizione 1.16 (Numero complesso). *Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è determinato da due numeri reali $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, detti rispettivamente parte reale e parte immaginaria. Il numero complesso si esprime nella forma algebrica:*

$$z = a + jb,$$

dove j è l'unità immaginaria. Dato $z = a + jb$, si indicano $a = \Re(z)$ e $b = \Im(z)$.

Definizione 1.17 (Unità immaginaria). *Il numero complesso j è detto unità immaginaria. L'unità immaginaria gode della seguente proprietà:*

$$j^2 = j \cdot j = -1$$

L'insieme dei complessi è indicato con \mathbb{C} . Il sottoinsieme dei complessi a parte immaginaria nulla si identifica con l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} . I numeri complessi con parte reale nulla si dicono **numeri immaginari** o **numeri immaginari puri**.

L'insieme \mathbb{C} non è ordinato: non ha alcun senso scrivere $z_1 < z_2$ o $z_1 > z_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Esempio

Si determini la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = 1 - j2$$

Soluzione

La parte reale di z è $\Re(z) = 1$, mentre la parte immaginaria è $\Im(z) = -2$.

Definizione 1.18 (Coniugato). *Dato un numero complesso $z = a + jb$, si definisce il numero complesso coniugato*

$$\bar{z} = a - jb$$

Una notazione alternativa per il coniugato è anche z^*

Esempio

Dato il numero complesso $z = 1 - j2$, determinare il suo coniugato.

Soluzione

Il coniugato di z è dato da $\bar{z} = 1 + j2$.

1.9.1 Inverso moltiplicativo

Definizione 1.19 (Inverso moltiplicativo di un numero complesso). *Dato un numero complesso $z = a + jb$, con $z \neq 0$, il suo inverso moltiplicativo si ottiene come*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Osservazione 4. *Si noti che se $z = j$, il suo inverso è*

$$\frac{1}{j} = -j.$$

1.10 Rappresentazione polare

Dato che un numero complesso è specificato da due numeri reali è naturale identificare $z = a + jb \in \mathbb{C}$ con la sua rappresentazione cartesiana $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, come mostrato in Figura 1.1. Il piano diventa allora una rappresentazione dell'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} . L'asse delle ascisse si dice *asse reale* e quello delle ordinate *asse immaginario*.

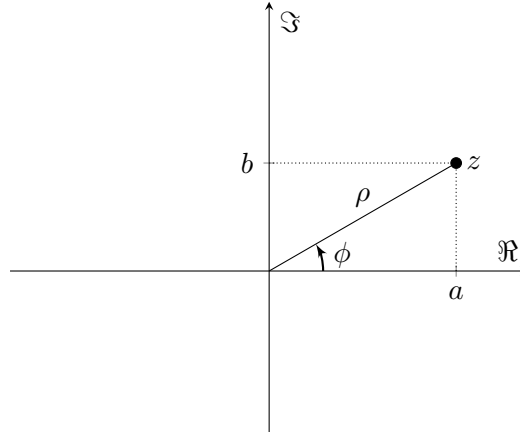


Figura 1.1: Rappresentazione di un numero complesso $z = a + jb$ sul piano complesso.

Nel piano si può specificare un punto z anche assegnandone le coordinate polari (ρ, ϕ) , dove ρ è il **modulo** e ϕ la **fase** (o argomento) del vettore che ha come origine l'origine del piano complesso, e come estremo il punto z . La coppia (ρ, ϕ) è la **rappresentazione polare** del numero complesso

$$z = a + jb = \rho (\cos(\phi) + j \sin(\phi)).$$

Definizione 1.20 (Modulo di un numero complesso). *Il modulo di un numero complesso $z = a + jb$ si denota con $|z| = \rho$ ed è dato da*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Osservazione 5. *Si noti che $|z|^2 = \rho^2 = z\bar{z}$.*

Definizione 1.21 (Fase di un numero complesso). *La fase (o argomento) di un numero complesso $z = a + jb$ si denota con $\angle z = \arg(z) = \phi$ ed è determinata tramite la relazione*

$$\angle z = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right), & \text{se } a > 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \text{se } a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \text{ e } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \text{ e } b < 0 \end{cases}$$

1.11 Esponenziale trigonometrico

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si definisce

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Questa definizione è identica a quella che si da nel caso di z reale. Anche nel caso complesso la serie è assolutamente convergente e vale

$$e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}$$

e quindi per $z = a + jb$

$$e^z = e^{a+jb} = e^a e^{jb}.$$

1.11.1 Formula di Eulero

Si consideri il numero complesso $z = jb$. Dalla definizione, si può ricavare che

$$e^{jb} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jb)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k}}{(2k)!} + j \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nelle due sommatorie si riconoscono le serie di Taylor delle funzioni $\cos(b)$ e $\sin(b)$. Si può ricavare così, la *formula di Eulero*

$$e^{jb} = \cos(b) + j \sin(b).$$

L'esponenziale di un numero complesso immaginario puro è strettamente legato alla rappresentazione polare dei numeri complessi. Basta osservare che per $z \in \mathbb{C}$

$$z = a + jb = \rho (\cos(\phi) + j \sin(\phi)) = \rho e^{j\phi} = |z| e^{j\angle z}$$

Analogamente, si può dimostrare che il coniugato di z è dato da

$$\bar{z} = a - jb = \rho (\cos(\phi) - j \sin(\phi)) = \rho e^{-j\phi} = |z| e^{-j\angle z}$$

Esempio

Trovare la rappresentazione polare $\rho e^{j\phi}$ del numero complesso $z = 1 - j$.

Soluzione

Per ottenere la rappresentazione polare basta calcolare

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \phi &= \text{atan}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Quindi, si ha che $z = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$.

1.11.2 Utili espressioni trigonometriche

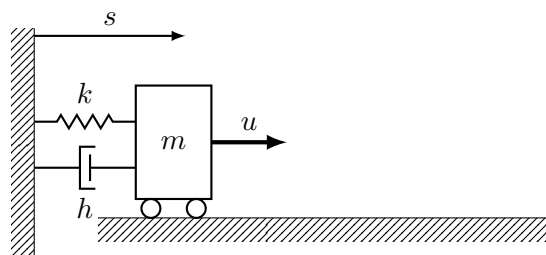
Dalla formula di Eulero per $e^{j\alpha}$ e $e^{-j\alpha}$, è possibile ricavare le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \\ \sin(\alpha) &= \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \end{aligned}$$

Analisi di sistemi dinamici: movimenti ed equilibri

2.1 Sistema massa-molla-smorzatore

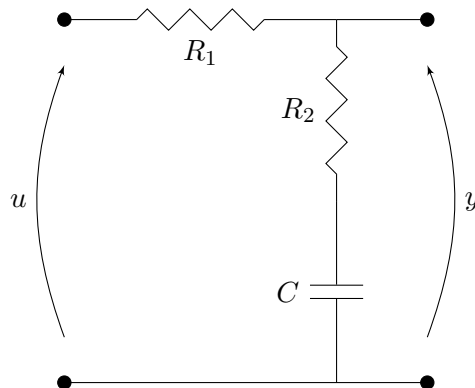
Sia dato il sistema fisico riportato in Figura, che rappresenta un carrello che si muove lungo una guida orizzontale rettilinea. Si considera il contributo dell'attrito trascurabile. Al carrello di massa m viene applicata una forza $u(t)$ lungo la direzione del moto. L'uscita del sistema è la posizione $s(t)$ del carrello. Il carrello è connesso a un muro con una molla con costante elastica $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ e con uno smorzatore con costante di smorzamento $h \in \mathbb{R}$, $h \geq 0$.



1. Scrivere le equazioni del sistema nello spazio di stato.
2. Calcolare gli autovalori del sistema al variare di k e h .
3. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $s(0) = 1$ e velocità nulla.
4. Posti $m = 1$, $k = h = 2$ calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $s(0) = 1$ e velocità nulla.
5. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 1$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $s(0) = 1$ e velocità nulla.
6. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 0$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $s(0) = 1$ e velocità nulla.
7. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, si trovi il valore di \bar{u} tale che il sistema abbia un equilibrio in posizione $\bar{s} = 2$ e velocità nulla.
8. Dire cosa cambia nel punto precedente se la posizione e la velocità iniziali sono entrambe nulle, mentre la forza applicata al carrello è $u(t) = \bar{u} = 4$.

2.2 Circuito RC

Si consideri il partitore di tensione rappresentato in figura con $R_1 = R_2 = 1$ e $C = 1$, dove $u(t)$ è la tensione di ingresso al circuito e $y(t)$ è la tensione misurata in uscita.



1. Scrivere il modello del circuito nello spazio di stato.
2. Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio per $u(t) = \bar{u}$, $\forall t \geq 0$.
3. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \bar{u} \operatorname{sca}(t)$, per condizioni iniziali nulle.
4. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \bar{u} e^{-2t}$, per condizioni iniziali nulle.
5. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \bar{u} \cos\left(\frac{t}{2}\right)$, per condizioni iniziali nulle.

3.1 Analisi di investimenti

Una banca propone un tasso d'interesse $i_1 = 3\%$ trimestrale mentre un'altra propone un tasso $i_2 = 12.5\%$ annuale. Se si ha intenzione di mantenere il capitale investito I per almeno un anno, quale dei due investimenti è più conveniente?

3.2 Prestito

Una banca propone un prestito pari a P , con un tasso d'interesse fisso i da estinguere con una rata annuale fissa R .

1. Se si vuole estinguere il prestito in un numero N di anni, quale dovrà essere l'importo della rata R ?
2. Fissato il valore della rata R , in quanti anni si estinguerà il prestito?

3.3 Modello degli studenti universitari

Si consideri la dinamica degli studenti in un corso triennale. Siano $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ il numero di iscritti al 1°, 2°, 3° anno dell'anno accademico k .

- $u(k)$: il numero di studenti che superano l'esame di maturità nell'anno k e si iscrivono nell'anno $k + 1$;
- $y(k)$: il numero di laureati nell'anno k ;
- $\alpha_i \in [0, 1]$: tasso degli studenti promossi nell' i -esimo anno di corso ($i \in \{1, 2, 3\}$);
- $\beta_i \in [0, 1]$: tasso degli studenti ripetenti nell' i -esimo anno di corso ($i \in \{1, 2, 3\}$);
- $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i + \beta_i \leq 1$, ossia $1 - \alpha_i + \beta_i$ rappresenta il tasso di abbandono all'anno i .

Si trascurino le iscrizioni di studenti provenienti da altre università.

1. Scrivere il modello dinamico del sistema.
2. Studiare la stabilità del sistema dinamico.
3. Posto:

$$\alpha_1 = 0.5 \quad \alpha_2 = 0.6 \quad \alpha_3 = 0.5 \quad \beta_1 = 0.2 \quad \beta_2 = 0.2 \quad \beta_3 = 0.5$$

determinare lo stato di equilibrio corrispondente a $u(k) = \bar{u} = 4000$.

3.4 Il ranking di Google: PageRank (semplificato)

Un qualsiasi motore di ricerca su Internet, una volta trovate tutte le pagine che contengono il testo richiesto dall'utente, ha il problema di decidere l'ordine in cui presentare all'utente l'elenco dei riferimenti alle pagine trovate dal motore di ricerca (PageRank). Un modello semplificato dell'algoritmo di ranking utilizzato da Google è descritto in seguito.

Si immagini una persona che navighi in rete senza mai fermarsi e che visiti le pagine della rete scegliendo i link uscenti da ciascuna pagina visitata in maniera del tutto casuale. La successione di eventi decisionali, e cioè la scelta di uno dei link contenuti nella pagina visitata corrente, definisce l'indice temporale k . Se la generica i -esima pagina ha N_i link ad altre pagine, allora la probabilità che la persona passi dalla pagina i alla pagina j è data da:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N_i}, & \text{se } \exists \text{ link da } i \text{ a } j \\ 0, & \text{se } \nexists \text{ link da } i \text{ a } j \end{cases}$$

Indicando con $x_i(k)$ la probabilità che l'utente si trovi dopo l'evento k sulla pagina i , si ha:

$$x(k+1) = Ax(k),$$

dove gli elementi della matrice A sono $a_{ji} = \alpha_{ij}$ con $i \neq j$, e $a_{ii} = 0$.

La probabilità $x_i(k)$ sul lungo periodo rappresenta il PageRank della pagina i -esima. Valori elevati di $x_i(k)$ indicano infatti un'alta probabilità di visitare la pagina i .

Considerando la rete mostrata in Figura 3.1:

1. Scrivere il modello del sistema.
2. Valutare la stabilità del sistema.
3. Calcolare il ranking delle pagine della rete.

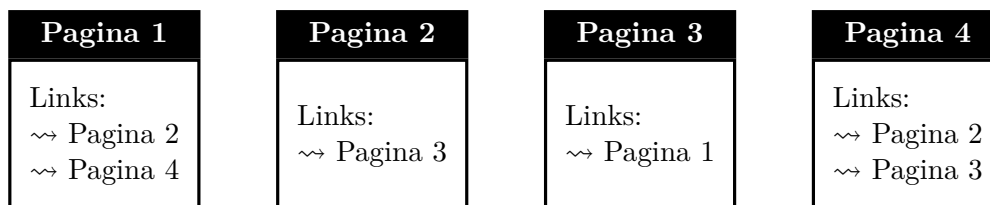


Figura 3.1: Collegamenti fra le pagine web di una rete.

3.5 Popolazioni animali

Consideriamo il famoso problema posto da Leonardo Pisano detto Fibonacci nel 1202 per descrivere la crescita di popolazione di conigli:

“ Un tizio lascia una coppia di conigli in un luogo circondato da mura. Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno, a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia dà alla luce una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese?

Liber Abaci, 1202

”

1. Scrivere il modello del sistema descritto da Fibonacci.
2. Valutare la stabilità del sistema descritto da Fibonacci.
3. Calcolare quante coppie di conigli ci saranno dopo un anno, secondo l'evoluzione descritta da Fibonacci.

Stabilità dei sistemi dinamici e sistemi interconnessi

4.1 Sistema lineare (non osservabile)

Si consideri il sistema lineare con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) - 4\alpha x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t) - 4x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro del sistema.

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. determinare per quali valori di α il sistema è asintoticamente stabile
2. posto $\alpha = 0$, determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 1$ e all'ingresso $u(t) = 3$, $t \geq 0$
3. posto $\alpha = 0$, dire, motivando la risposta, se è possibile scegliere l'ingresso $u(t)$, $t \geq 0$, in modo che lo stato evolva dalla condizione iniziale $x_1(0) = x_2(0) = 0$ al valore asintotico $\bar{x}_1 = 4$ e $\bar{x}_2 = 5$

4.2 Sistemi interconnessi

Si considerino i sistemi lineari \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , descritti dalle seguenti equazioni:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ y_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_2(t) \\ y_2(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

I due sistemi vengono interconnessi come mostrato in Figura 4.1 per ottenere un sistema \mathcal{S} con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

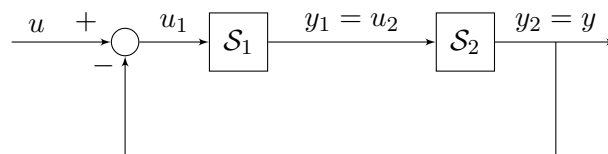


Figura 4.1: Sistema \mathcal{S} con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Discutere le proprietà di stabilità dei sistemi \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , singolarmente.
2. Discutere le proprietà di stabilità della serie di \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 .

3. Scrivere le equazioni del sistema \mathcal{S} in variabili di stato.
4. Discutere le proprietà di stabilità del sistema \mathcal{S} .
5. Dire se le proprietà di stabilità del sistema interconnesso cambiano se i sistemi vengono interconnessi come in Figura 4.2 e 4.3.

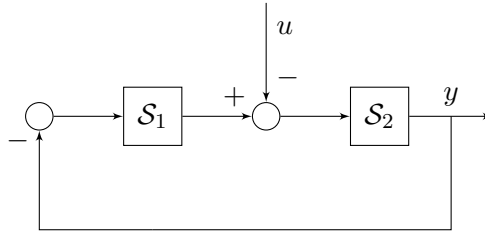


Figura 4.2: Sistema \mathcal{S} , prima variante.

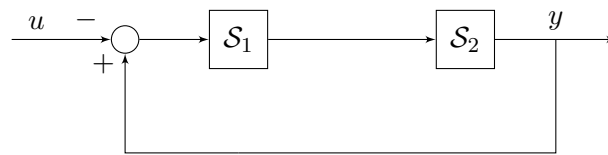


Figura 4.3: Sistema \mathcal{S} , seconda variante.

4.3 Sistema non lineare

Si consideri il sistema non lineare con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^2(t) + x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Determinare il valore \bar{u} dell'ingresso $u(t) = \bar{u}, t \geq 0$, a cui è associato l'equilibrio $\bar{x} = [0 \ 0]^T$.
2. Calcolare il movimento dello stato associato a

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad u(t) = 0, t \geq 0.$$

3. Valutare le proprietà di stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x} = [0 \ 0]^T$, associato all'ingresso $u(t) = \bar{u}, t \geq 0$.

4.4 Modello di crescita logistica di Verhulst

Si consideri il sistema non lineare senza ingresso descritto dalla equazione

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right), \quad r, k \in \mathbb{R}^+$$

che descrive l'evoluzione di una popolazione (modello logistico o equazione logistica). In particolare, si possono distinguere due contributi all'evoluzione della popolazione, e cioè

$$\dot{x}(t) = \overbrace{rx(t)}^{\blacktriangle} - \overbrace{\frac{r}{k}x^2(t)}^{\blacktriangledown}$$

in cui il termine \blacktriangle tiene conto della crescita della popolazione (r , tasso di crescita), proporzionalmente agli individui già presenti, mentre il termine \blacktriangledown tiene conto dell'effetto di "sovraffollamento", legato al numero di possibili incontri tra individui proporzionali a $x^2(t)$ (k , capacità).

Calcolare quali sono gli stati di equilibrio del sistema al variare dei parametri r e k e discuterne la stabilità.

4.5 Pendolo inverso

Si consideri il sistema pendolo rappresentato in Figura 4.4.

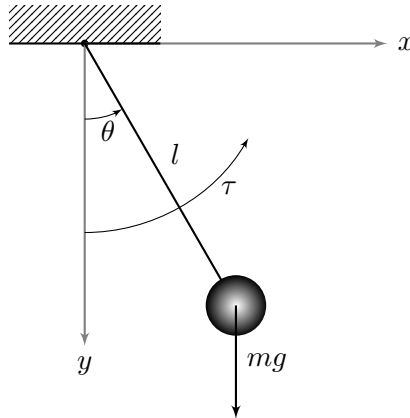


Figura 4.4: Sistema pendolo.

Si ipotizzi che la massa dell'asta a cui è sospesa la massa m sia trascurabile, così che il momento d'inerzia del pendolo sia $J = ml^2$. Si supponga inoltre che è anche presente un termine di dissipazione lineare con la velocità angolare (momento di attrito $\tau_a(t) = k\dot{\theta}(t)$, $k > 0$).

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Scrivere il modello del sistema in variabili di stato, considerando come uscita l'angolo di inclinazione del pendolo rispetto alla verticale, e come ingresso il momento torcente $\tau(t)$ in figura.
2. Calcolare gli stati di equilibrio del sistema associati a ingresso nullo.
3. Discutere la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto precedente. Verificare che il pendolo presenta un equilibrio instabile.
4. Il pendolo viene retroazionato come mostrato in Figura 4.5. Trovare, se possibile, un valore costante per l'ingresso $v(t) = \bar{v}$, $t \geq 0$, e un valore per il parametro $p \in \mathbb{R}$ tali che il sistema retroazionato ammetta come stato di equilibrio lo stato di equilibrio instabile del pendolo trovato al punto precedente e che tale equilibrio sia asintoticamente stabile.

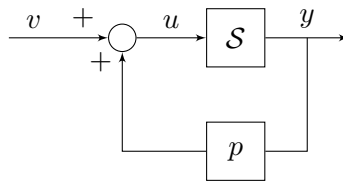


Figura 4.5: Sistema di controllo in retroazione del pendolo.

Trasformata di Laplace e funzione di trasferimento

5.1 Risposta allo scalino

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

con $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Valutare la stabilità del sistema.
3. Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
4. Si determini l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ a fronte di un ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.

5.2 Stabilità e funzione di trasferimento

Dato il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$.
2. Si dica se il sistema è asintoticamente stabile.

5.3 Risposta all'esponenziale

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t) \\ y(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

con $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Si valuti la stabilità del sistema.
3. Si calcoli l'espressione analitica della risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$.
4. Si calcoli l'espressione analitica della risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^t$, $t \geq 0$.

5.4 Movimento del sistema

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 9u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ e valutare la stabilità del sistema.
2. Determinare l'espressione analitica $y(t)$ della risposta a $u(t) = e^{-3t}$, $t \geq 0$.
3. Verificare la correttezza dell'espressione applicando, se possibile, i teoremi del valore iniziale e finale.
4. Determinare il movimento dell'uscita associato a

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u(t) = e^{-3t}, t \geq 0.$$

5.5 Poli multipli

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_1(t) - 3x_3(t) - u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Valutare la stabilità del sistema.
3. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema.
4. Determinare l'espressione analitica $y(t)$ della risposta a $u(t) = \text{sca}(t)$, $t \geq 0$.

5.6 Sistema a fase non minima

Si consideri il sistema lineare di ordine 3 avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s-1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

1. Si verifichino le proprietà di stabilità del sistema (si può, a questo scopo, utilizzare il criterio di Routh Hurwitz).
2. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.

Sistemi interconnessi e funzioni di trasferimento

6.1 Schema a blocchi

Con riferimento al seguente schema a blocchi mostrato in Figura 6.1

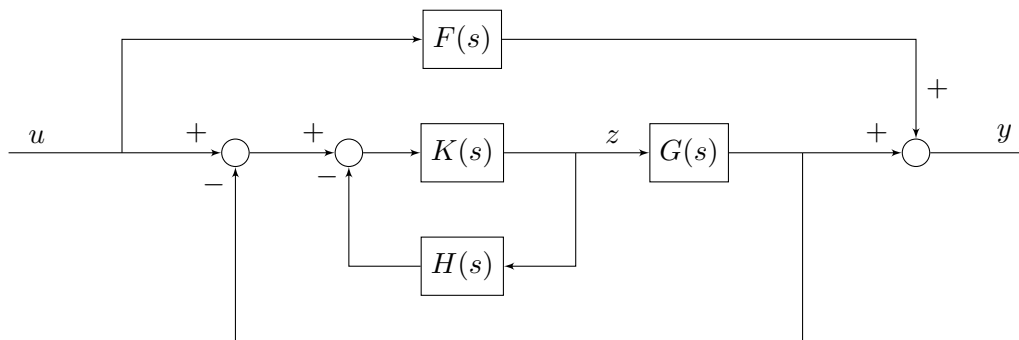


Figura 6.1: Schema a blocchi di riferimento.

1. Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e la variabile $z(t)$.
2. Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
3. Si dica se è necessario che uno dei sistemi $G(s)$, $H(s)$, $K(s)$, $F(s)$ sia asintoticamente stabile per l'asintotica stabilità del sistema complessivo.

6.2 Schemi a blocchi

Si calcoli la funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ del il sistema interconnesso rappresentato in Figura 6.2, composto da tre sistemi lineari con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$.

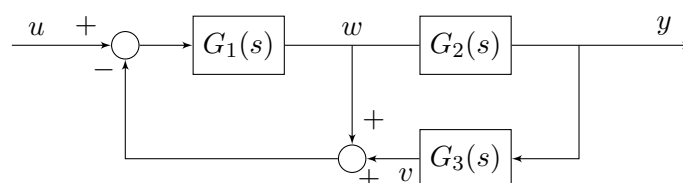


Figura 6.2: Sistema interconnesso.

6.3 Schema a blocchi

Dato lo schema a blocchi mostrato in Figura 6.3

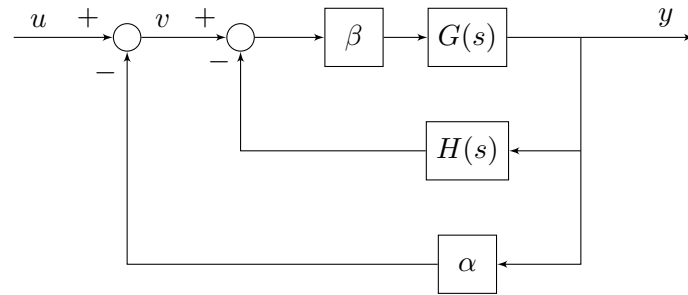


Figura 6.3: Schema a blocchi di riferimento.

con

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = \frac{s}{s+2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

1. Calcolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
2. Si calcolino guadagno generalizzato, tipo, poli, zeri della funzione di trasferimento ottenuta al punto precedente.
3. Studiare la stabilità del sistema cui corrisponde la funzione di trasferimento trovata al punto precedente.
4. Posti $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, tracciare l'andamento qualitativo della risposta all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.

6.4 Schema a blocchi

Si consideri il sistema dinamico con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = w(t) + 2x(t) \\ \dot{z}(t) = 4y(t) \\ \dot{y}(t) = -4y(t) + 5(w(t) - z(t)) \\ x(t) = u(t) + 10y(t) \end{cases}$$

1. Si disegni lo schema a blocchi corrispondente.
2. Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
3. Come si sarebbe potuta calcolare tale funzione di trasferimento in modo alternativo?
4. Il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

6.5 Schema a blocchi

Si consideri lo schema a blocchi rappresentato in Figura 6.4.

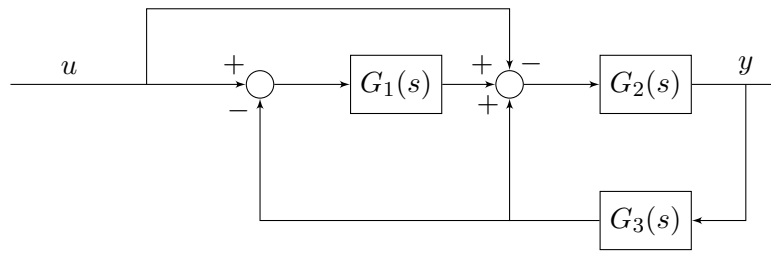


Figura 6.4: Schema a blocchi.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento (F.d.T.) complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
2. Si ponga:

$$G_1(s) = \frac{4(1 + 5s)}{1 + 4s}, \quad G_2(s) = \frac{2}{s}, \quad G_3(s) = k$$

Per quali valori di k il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

3. Si ponga $k = 100$. Qual è il valore di regime per l'uscita a fronte di un ingresso costante $u(t) = 200$?

6.6 Schema a blocchi

Si considerino i sistemi dinamici:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) - 4z(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 : \dot{z}(t) = -z(t) + 2u(t) + 5w(t)$$

1. Dire se i sistemi dati, presi singolarmente, sono asintoticamente stabili.
2. Considerando che:
 - per il sistema \mathcal{S}_1 gli ingressi sono $u(t)$ e $z(t)$ e l'uscita è $w(t)$,
 - per il sistema \mathcal{S}_2 gli ingressi sono $u(t)$ e $w(t)$ e l'uscita è $z(t)$,

si disegni lo schema a blocchi complessivo che mostri le interconnessioni tra i sottosistemi dati, e che abbia come ingresso $u(t)$ e uscita $z(t)$.

3. Si calcoli la funzione di trasferimento (F.d.T.) complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $z(t)$.
4. Si tracci la risposta allo scalino del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $z(t)$.

6.7 Schemi a blocchi

Si consideri il sistema interconnesso mostrato in Figura 6.5, in cui $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ sono le funzioni di trasferimento di sistemi lineari del primo ordine.

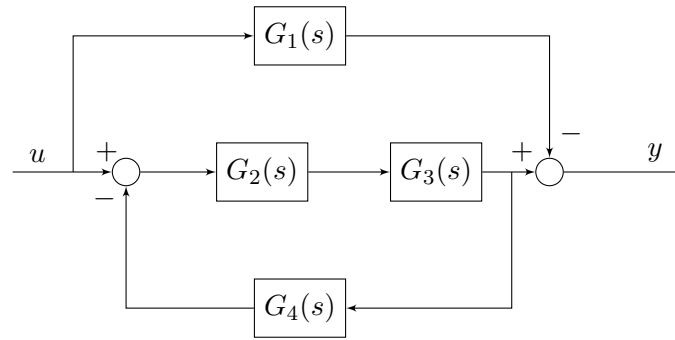


Figura 6.5: Sistema \mathcal{S} con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Posto

$$G_1(s) = \frac{1}{s+10}, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+2}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s-1}, \quad G_4(s) = -\frac{8}{s+9},$$
 calcolare l'espressione di $H(s)$.
3. Valutare le proprietà di stabilità del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, con le funzioni di trasferimento del punto 2.
4. Determinare il guadagno, il tipo, i poli e gli zeri di $H(s)$ calcolata al punto 2.
5. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata di $H(s)$ all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$, indicando nel grafico
 - (a) valore iniziale;
 - (b) valore asintotico;
 - (c) tempo di assestamento.

7.1 Sistemi a tempo discreto

Un'azienda A si divide una determinata clientela con altre aziende con cui è in competizione. All'istante temporale 0 l'azienda A detiene il 30% della clientela. Per incrementare la propria quota di mercato (pacchetto clienti) decide di puntare su una campagna pubblicitaria che promette i seguenti risultati:

- l'azienda A conquisterà, ogni mese, un ventesimo dei clienti non suoi;
- l'azienda A perderà, ogni mese, un ventesimo dei propri clienti.

Assumendo che il numero di clienti complessivi rimanga invariato:

- costruire un modello in spazio di stato a tempo discreto in grado di descrivere l'evoluzione del pacchetto clienti dell'azienda A;
- studiare le proprietà di stabilità del sistema definito al punto a.
- studiare l'evoluzione del pacchetto clienti della azienda A nel tempo, e la soluzione in condizioni stazionarie;
- considerando il modello ottenuto al punto a. indipendentemente dal contesto applicativo, esistono delle condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ ($x(t)$ denota lo stato del sistema)?
Inoltre, esistono delle condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) = x(0)$ per ogni t ?

7.2 Sistemi non lineari a tempo continuo (1)

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)u(t) + x_2(t)u(t) + u(t)^2 \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t)^2 + u(t)^2 \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

- Si risponda alle seguenti domande, giustificando brevemente le risposte:
 - Il sistema è dinamico?
 - Il sistema è lineare?
 - Qual è l'ordine di un sistema?
 - Il sistema è MIMO?
 - Il sistema è strettamente proprio?

- B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.
- C. Si calcolino i possibili movimenti di equilibrio di stato e uscita corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.
- D. Si valutino le proprietà di stabilità degli equilibri individuati al punto C.
- E. Si scriva l'espressione analitica della risposta dell'uscita all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$ e alle condizioni iniziali $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 1)$.

7.3 Sistemi non lineari a tempo continuo (2)

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -\sin(x(t)) + u(t) \\ y(t) &= x(t) + u(t) \end{cases}$$

- A. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) .
- B. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti agli ingressi:
- $u(t) = \bar{u} = 1$;
 - $u(t) = \bar{u} = 0$.
- C. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio calcolati al punto B.

7.4 Schemi a blocchi e funzioni di trasferimento

Si consideri lo schema a blocchi in Figura 7.1. dove i sistemi S_1 , S_2 e S_3 sono caratterizzati dalle

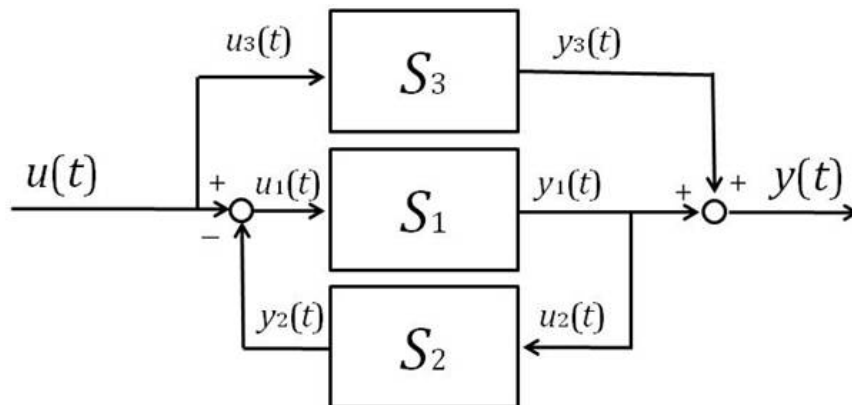


Figura 7.1: Schema a blocchi dell'esercizio 4

seguenti equazioni.

$$\begin{aligned} S_1 : & \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u_1(t) \\ y_1(t) &= -(b+1)x_1(t) + u_1(t) \end{cases} \\ S_2 : & \begin{cases} \dot{x}_2(t) &= bx_2(t) + u_2(t) \\ y_2(t) &= x_2(t) \end{cases} \\ S_3 : & \begin{cases} \dot{x}_3(t) &= -2x_3(t) + u_3(t) \\ y_3(t) &= x_3(t) \end{cases} \end{aligned}$$

dove il parametro $b \in \mathbb{R}$.

- A. Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva $G(s)$ tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
- B. Relativamente al sistema complessivo, si risponda alle seguenti domande:

- a. individuare i poli, gli zeri, il guadagno generalizzato e la costante di trasferimento della funzione di trasferimento $G(s)$ (in funzione di b);
 - b. si calcoli il valore di b tale per cui il guadagno di $G(s)$ è pari a 1. Si individuino in questo caso i poli e gli zeri di $G(s)$;
 - c. individuare gli autovalori del sistema la cui funzione di trasferimento è $G(s)$;
 - d. si valutino le proprietà di stabilità del sistema complessivo al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$.
- C. Si ponga $b = -3$. Si calcoli l'espressione analitica della risposta forzata dell'uscita del sistema a fronte di un ingresso $u(t) = 3e^{-2t}$.

7.5 Sistemi lineari a tempo continuo

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + \alpha x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + 2u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

- A. Si studino le proprietà di stabilità del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
- B. Si calcoli l'espressione del movimento libero dell'uscita del sistema con condizioni iniziali $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$ nei seguenti casi:
 - a. $\alpha = -8$;
 - b. $\alpha = 0$.
- C. Si determini la funzione di trasferimento del sistema. In particolare si individuino, al variare del parametro α :
 - a. tipo;
 - b. guadagno generalizzato;
 - c. poli;
 - d. zeri.
- D. Si disegni il grafico qualitativo della risposta forzata dell'uscita del sistema al segnale in ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$ nei seguenti casi:
 - a. $\alpha = -8$;
 - b. $\alpha = 0$.

7.6 Funzioni di trasferimento, approssimazioni ai poli dominanti, risposte qualitative

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -10x_1(t) + 10u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -0.1x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

- A. Si scriva la funzione di trasferimento del sistema.
- B. Si calcolino, per la funzione di trasferimento ricavata al punto precedente:
 - a. guadagno;
 - b. tipo;
 - a. poli;

- b. zeri;
a. polo dominante.

C. Si indichi quale dei grafici in Figura 7.2 mostra la risposta del sistema ad uno scalino di ampiezza unitaria. Si motivi la risposta in modo conciso.

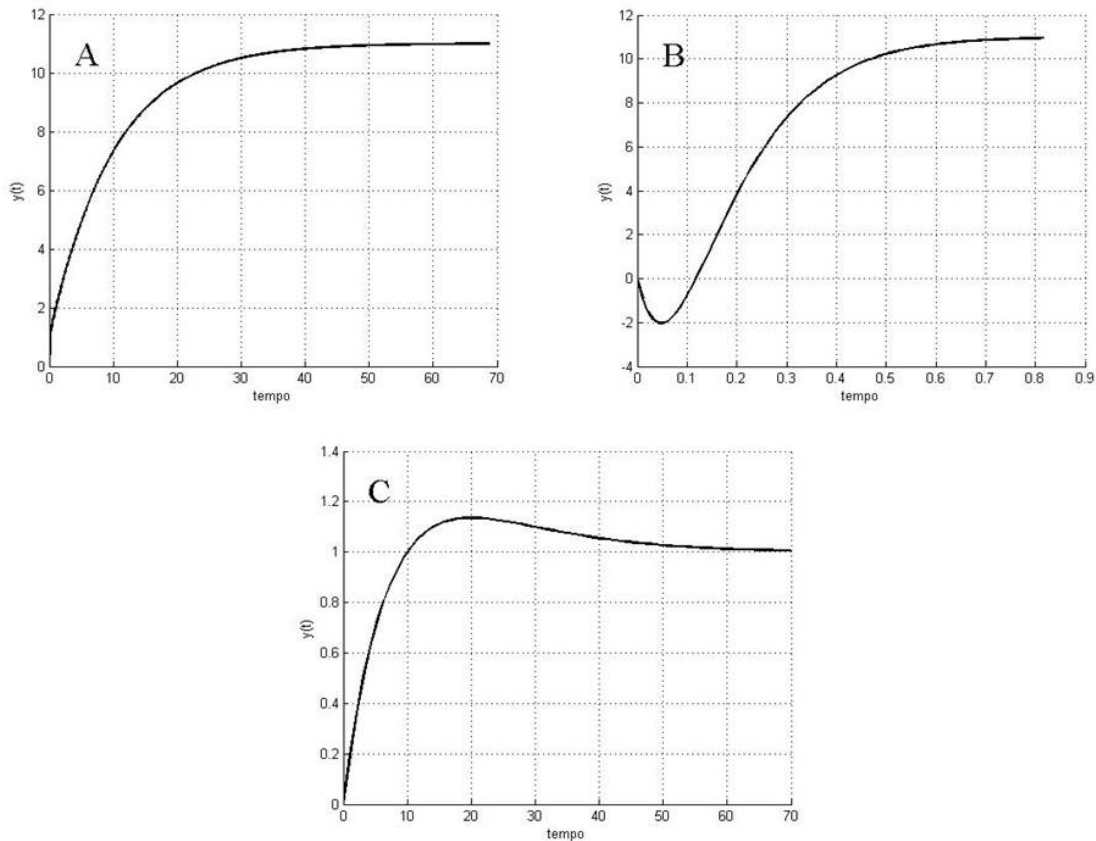


Figura 7.2: Risposte allo scalino dell'esercizio 6

D. Si indichi quale delle seguenti funzioni di trasferimento costituisce una opportuna approssimazione ai poli dominanti di quella ricavata al punto A. Si illustri brevemente il motivo di tale scelta.

$$G_a(s) = \frac{11}{s + 0.1}, \quad G_b(s) = \frac{11}{1 + 10s}, \quad G_c(s) = \frac{11}{1 + 0.1s}, \quad G_d(s) = \frac{11}{s + 1}$$

8.1 Tracciamento diagrammi di Bode

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza del sistema dinamico lineare con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + 0.1s}{1 + 0.01s}$$

8.2 Tracciamento diagrammi di Bode con poli complessi coniugati

Si consideri un sistema dinamico lineare con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n = 2, \xi = 0.8.$$

Rispondere in maniera chiara e precisa ai seguenti quesiti:

1. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza associata a $G(s)$.
2. Dire che cosa cambia nei diagrammi di Bode asintotici nel caso in cui lo smorzamento sia $\xi = 0.1$.
3. Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino unitario del sistema con $\xi = 0.8$ e con $\xi = 0.1$.

8.3 Risposta in frequenza

Data la funzione di trasferimento di un sistema lineare del terzo ordine

$$G(s) = 10 \frac{s + 1}{(s + 0.1)(s^2 + 20s + 100)}$$

Rispondere in maniera chiara e precisa ai seguenti quesiti:

1. Valutare le proprietà di stabilità del sistema.
2. Dire qual è il polo dominante del sistema.
3. Determinare la risposta di regime ($y_\infty(t)$) quando

$$u(t) = 2 + \sin(0.01t) + \sin(0.1t) + 2 \cos(100t), \quad t \geq 0$$

e valutare dopo quanto tempo la risposta del sistema si assesta a quella di regime calcolata.

4. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ e verificare che siano consistenti con i risultati ottenuti al punto precedente.
5. Approssimare il sistema con un sistema di ordine ridotto in modo che la risposta allo scalino sia simile (approssimazione di bassa frequenza).

8.4 Analisi diagrammi di Bode

Si consideri un sistema lineare senza autovalori nascosti la cui funzione di trasferimento $G(s)$ ha associati i diagrammi di Bode della risposta in frequenza rappresentati in Figura 8.1.

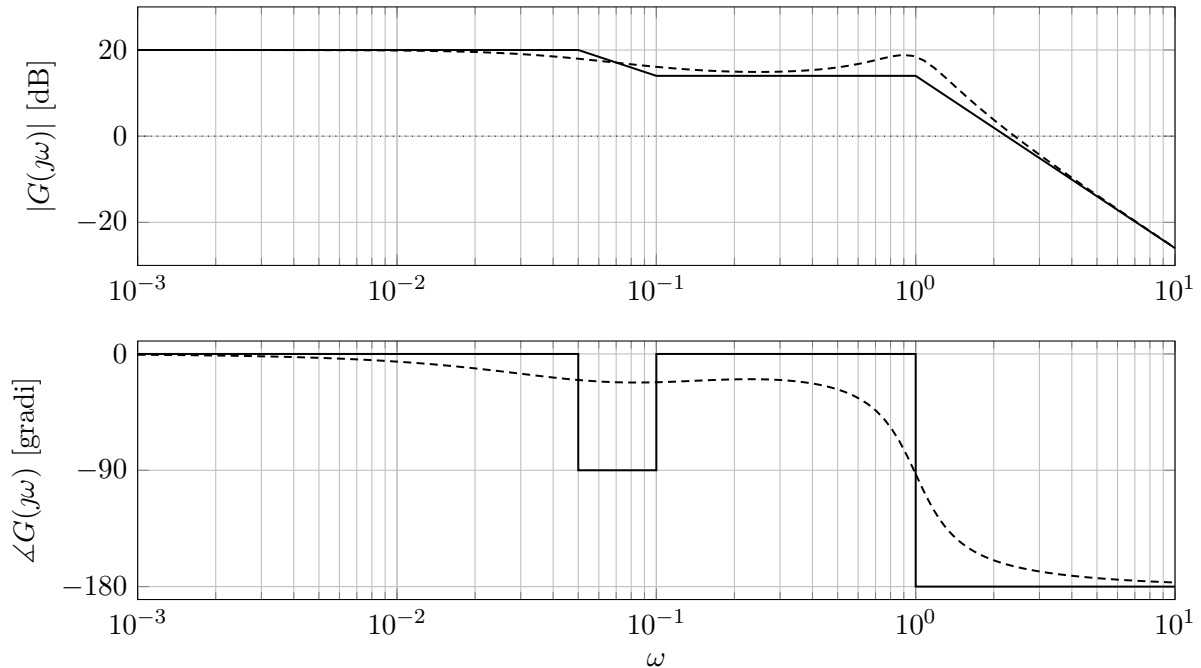


Figura 8.1: Diagrammi di Bode della risposta in frequenza associati a $G(s)$.

Rispondere in maniera chiara e precisa ai seguenti quesiti:

1. Dire, motivando la risposta, quanto valgono guadagno, tipo e moduli dei poli e zeri del sistema, se il sistema è asintoticamente stabile, se ha poli complessi o reali.
2. Dire, motivando la risposta, quale fra i gli andamenti riportati in Figura 8.2 rappresenta la risposta allo scalino del sistema.

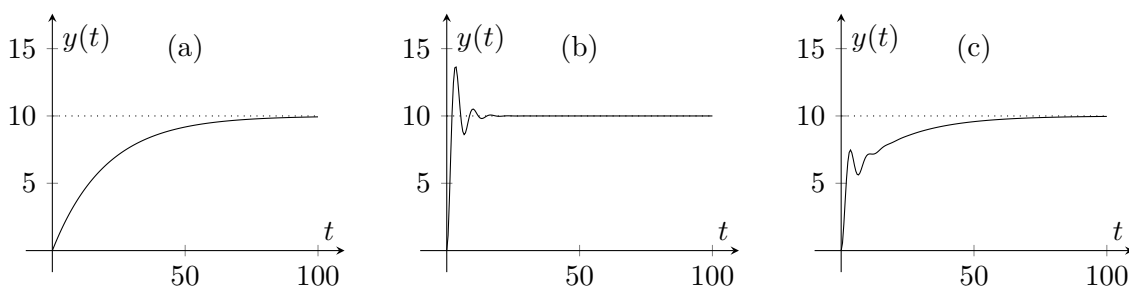


Figura 8.2: Alternative per la risposta allo scalino.

8.5 Risposta a diversi ingressi

Si consideri un sistema dinamico lineare di ordine 3 con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s+1)^2}$$

Associare ai grafici con le risposte $y_a(t)$, $y_b(t)$, $y_c(t)$, $y_d(t)$ rappresentate in Figura 8.3 i seguenti ingressi:

1. $u_1(t) = \text{imp}(t)$;
2. $u_2(t) = e^t \text{sca}(t)$;
3. $u_3(t) = \sin(t) \text{sca}(t)$;
4. $u_4(t) = \sin(100t) \text{sca}(t)$.

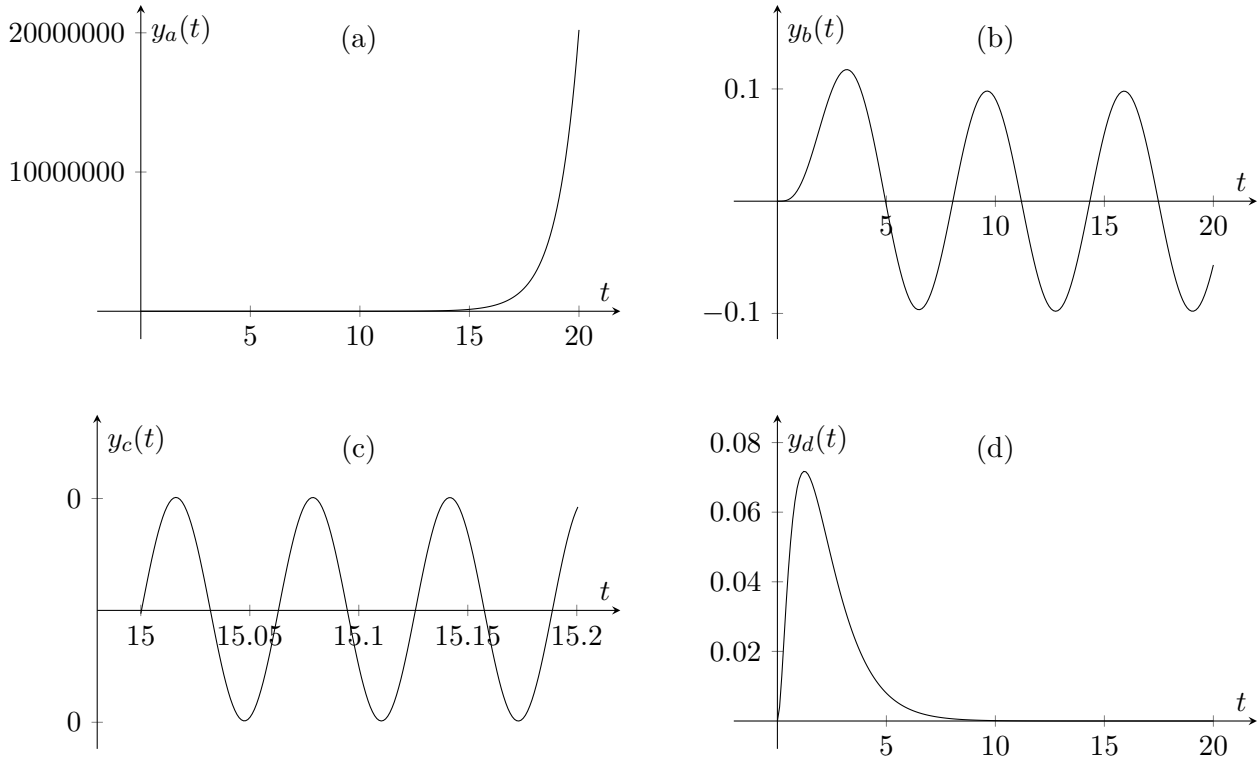


Figura 8.3: Risposte a ingressi diversi.

8.6 Analisi sistema di controllo

Si consideri il sistema di controllo rappresentato in Figura 8.4.

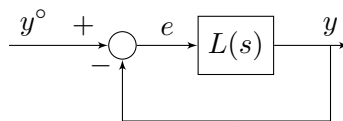


Figura 8.4: Schema del sistema di controllo.

in cui

$$L(s) = \frac{5}{s(1 + 0.05s)}.$$

Tipicamente, lo scopo di un sistema di controllo è quello di imporre un andamento desiderato $y^\circ(t)$, chiamato segnale di riferimento, e di progettare il sistema di controllo in maniera tale da rendere l'uscita $y(t)$ il più possibile simile al segnale di riferimento $y^\circ(t)$.

Si dica se il sistema di controllo dato è in grado di riprodurre correttamente in uscita il segnale di riferimento:

$$y^\circ(t) = a_1 \sin(0.5t + \beta_1) + a_2 \sin(t + \beta_2) + a_3 \sin(100t + \beta_3)$$

dove $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2$ e β_3 sono parametri arbitrari non nulli.

Analisi di stabilità dei sistemi di controllo

9.1 Cruise control

Il cruise control è un esempio eccellente di controllo in retroazione che si può trovare in molte automobili moderne. Lo scopo del cruise control è quello di mantenere la velocità del veicolo costante anche a fronte di disturbi esterni, come ad esempio il vento o la pendenza della strada. Questo è ottenuto misurando la velocità del veicolo, comparandola con la velocità desiderata e aggiustando automaticamente l'accelerazione secondo una legge di controllo.

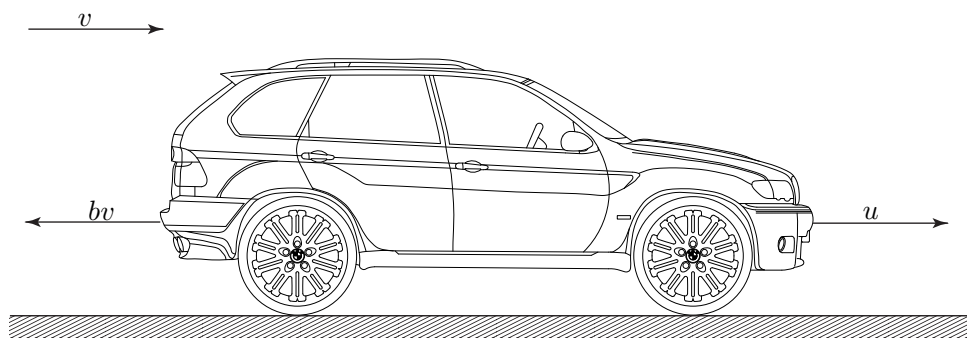


Figura 9.1: Diagramma di corpo libero.

Consideriamo un modello semplice della dinamica del veicolo, mostrato in Figura 9.1. Il veicolo, di massa m , è azionato tramite una forza di controllo u . La forza u rappresenta la forza generata dall'interfaccia strada/pneumatico. Per questo modello semplificato assumiamo che si controlla la forza direttamente, ignorando la dinamica del motore, delle ruote, etc., che sono coinvolte nella generazione della forza. Assumiamo che le forze che si oppongono al moto, $bv(t)$, dovute all'attrito volvente e all'effetto della resistenza dell'aria, dipendano linearmente con la velocità del veicolo $v(t)$, e agiscono nella direzione opposta al movimento del veicolo. Si consideri che la massa del veicolo è pari a $m = 1000\text{kg}$, e che il coefficiente d'attrito è $b = 10\text{Ns/m}$.

1. Calcolare la funzione di trasferimento $P(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $v(t)$.
2. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase di $P(s)$.
3. Si consideri lo schema di controllo mostrato in Figura 10.1.

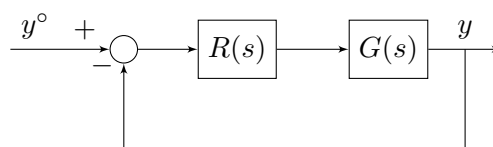


Figura 9.2: Schema di controllo.

Determinare la stabilità del sistema in anello chiuso quando $R(s) = \frac{k}{s}$, con $k \in \mathbb{R}_{>0}$, e $G(s) = P(s)$.

4. Si supponga che l'attuatore, non considerato in fase di progetto abbia funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{1}{1+s}.$$

Dire, motivando la risposta, per quali valori di k il sistema di controllo di Figura 9.3 che include il controllore $R(s) = \frac{k}{s}$ e l'attuatore con funzione di trasferimento $A(s)$, è ancora asintoticamente stabile.

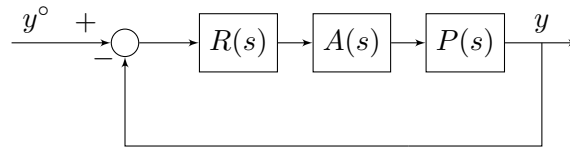


Figura 9.3: Schema di controllo.

5. Si supponga che l'attuatore, non considerato in fase di progetto abbia funzione di trasferimento:

$$A(s) = e^{-\tau s}, \quad \tau > 0.$$

Dire, motivando la risposta, per quali valori di τ il sistema di controllo di Figura 9.3 che include il controllore $R(s) = \frac{1}{s}$ e l'attuatore con funzione di trasferimento $A(s)$, è ancora asintoticamente stabile.

9.2 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{100(1-s)}{(1+5s)(1+s/3)^2}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $L(s)$.
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 9.4.

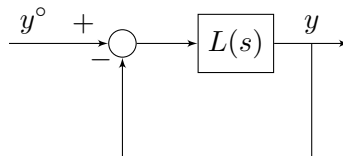


Figura 9.4: Schema di controllo.

9.3 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{400(1-2s)}{s^3 + 9s^2 + 8s}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $L(s)$.

2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 9.5.

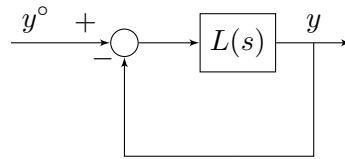


Figura 9.5: Schema di controllo.

9.4 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{1000(s + 10)}{(s - 5)(s + 20)^2}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $L(s)$.
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 9.6.

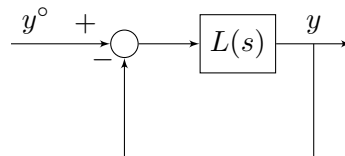


Figura 9.6: Schema di controllo.

9.5 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{10s}{(1 - s)^2(1 + 0.1s)}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $L(s)$.
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 9.7.

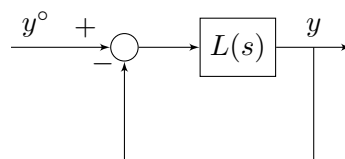


Figura 9.7: Schema di controllo.

3. Si supponga di connettere il sistema come mostrato in Figura 9.8. Dire per quali valori del parametro $k > 0$ il sistema rimane asintoticamente stabile.

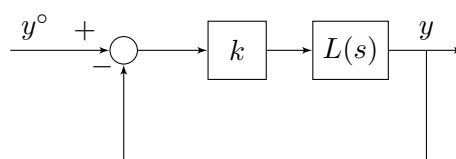


Figura 9.8: Schema di controllo.

10.1 Analisi delle prestazioni del cruise control

Si consideri il sistema di controllo per il cruise control di un'automobile mostrato in Figura 10.1.

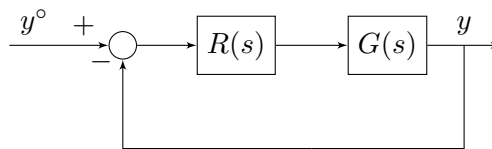


Figura 10.1: Schema di controllo.

In particolare, si ha che:

$$G(s) = \frac{1}{ms + b} \cdot \frac{1}{1 + s/10}$$

dove $m = 1000\text{kg}$, $b = 10\text{Ns/m}$. Le prestazioni richieste del sistema di controllo sono:

- Il sistema di controllo deve portare l'automobile alla velocità desiderata in circa 5s.
- La risposta allo scalino unitario del segnale di riferimento non deve presentare oscillazioni ripetute.
- La velocità reale dell'automobile non si può scostare dalla velocità desiderata di più del 2%.

1. Valutare quale dei seguenti controllori soddisfa le specifiche di progetto:

(a) $R_1(s) = 1000$

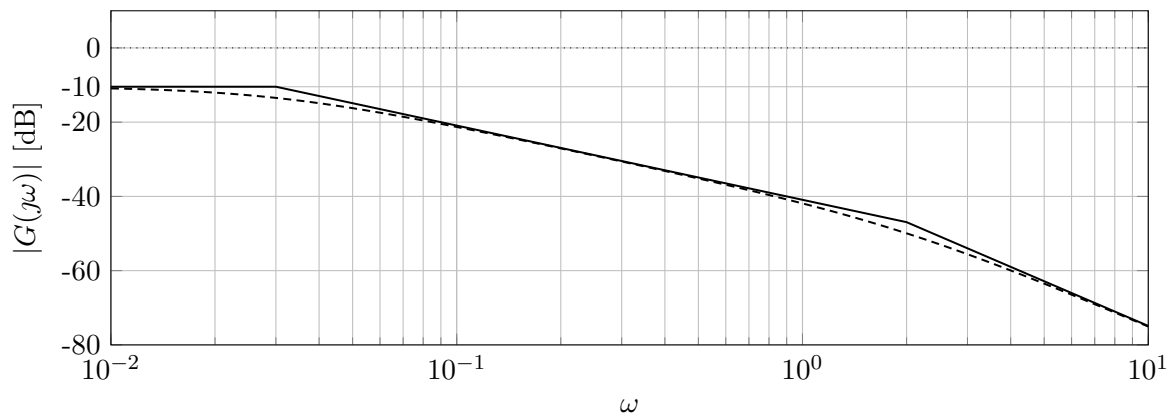
(b) $R_2(s) = \frac{1}{s}$

(c) $R_3(s) = \frac{10(1 + 100s)}{s}$

2. Tracciare la risposta allo scalino unitario del sistema di controllo con ingresso $y^o(t)$ e uscita $y(t)$ per i tre controllori.

10.2 Analisi delle prestazioni

Si consideri il sistema del II ordine, asintoticamente stabile, avente guadagno positivo e avente funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente al diagramma di Bode del modulo mostrato in Figura 10.2.

Figura 10.2: Diagramma di Bode del modulo di $G(s)$.

1. Si disegni in modo qualitativo la risposta allo scalino di ampiezza unitaria.
2. Si disegni il diagramma di Nyquist di $G(s)$.
3. Si discutano le proprietà di stabilità del sistema retroazionato in Figura 10.3 nei seguenti casi:
 - (a) $H(s) = 100$;
 - (b) $H(s) = -1$;
 - (c) $H(s) = 1$.

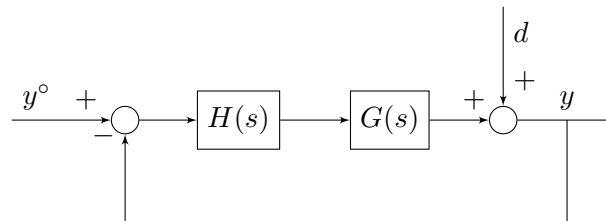


Figura 10.3: Sistema di controllo di riferimento.

4. Si consideri il caso $H(s) = 100$. Si descrivano le proprietà delle funzioni di trasferimento:
 - (a) Tra la variabile $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$;
 - (b) Tra il disturbo $d(t)$ e l'uscita $y(t)$.

10.3 Analisi delle prestazioni

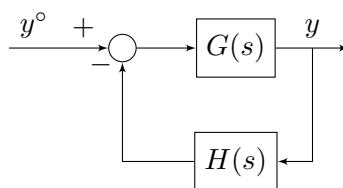


Figura 10.4: Sistema di controllo di riferimento.

Si consideri il sistema retroazionato descritto dallo schema a blocchi in Figura 10.4, dove $G(s)$ e $H(s)$ sono due funzioni di trasferimento prive di poli a parte reale positiva, con guadagno positivo, i cui moduli sono rappresentati in nel diagramma di Bode in Figura 10.5.

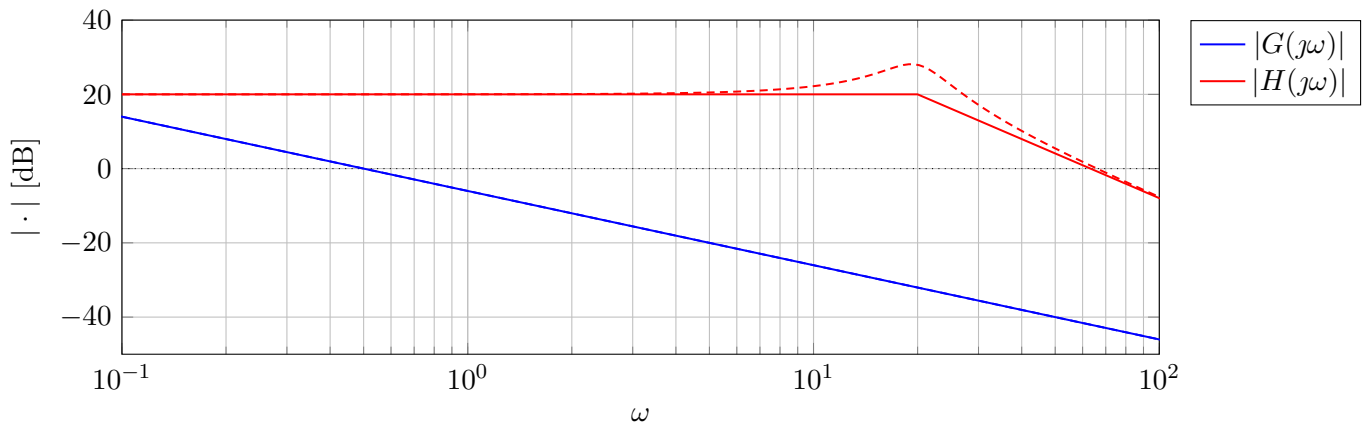
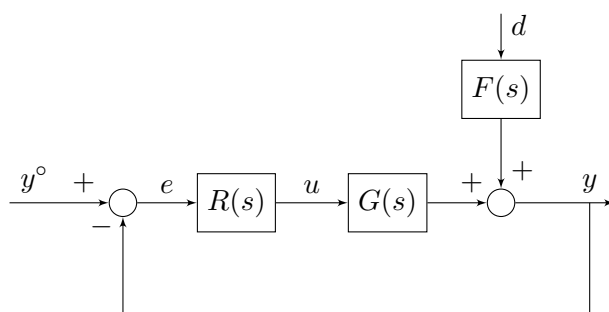


Figura 10.5: Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata a $G(s)$ e $H(s)$.

1. Valutare la pulsazione critica e il guadagno generalizzato di $L(s)$.
2. Dire se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Valutare approssimativamente il margine di fase di $L(s)$, spiegando il significato di tale indicatore nei riguardi della robustezza del sistema. Spiegare perché in questo caso il margine di fase non è un buon indicatore di robustezza.
3. Tracciare il diagramma di Bode del modulo (approssimato) relativo alla funzione di trasferimento in anello chiuso $F(s)$ da $y^\circ(t)$ a $y(t)$. Sulla base del diagramma così ricavato, tracciare inoltre l'andamento approssimato della risposta del sistema in anello chiuso ad un segnale di riferimento $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$.
4. Discutere le variazioni del comportamento del sistema (stabilità, risposta a scalino) indotte rispettivamente da una riduzione e da un aumento di $H(s)$ di un fattore 10.

11.1 Sistema a fase minima

Si consideri il seguente schema di controllo:



dove

$$G(s) = \frac{50}{(1 + 0.1s)(1 + s)(1 + 10s)} \quad F(s) = \frac{5}{1 + 0.01s}$$

Si vuole progettare $R(s)$ in modo tale che:

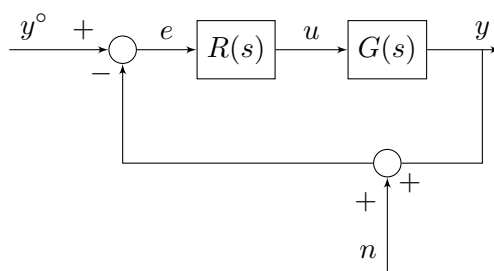
$$|e_\infty| \leq 0.025, \quad y^o(t) = 10 \operatorname{sca}(t)$$

$$d(t) = \pm \operatorname{sca}(t)$$

$$\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m \geq 60^\circ$$

11.2 Processo a fase non minima



Sia

$$G(s) = \frac{10(1 - s)}{1 + 10s}$$

Specifiche:

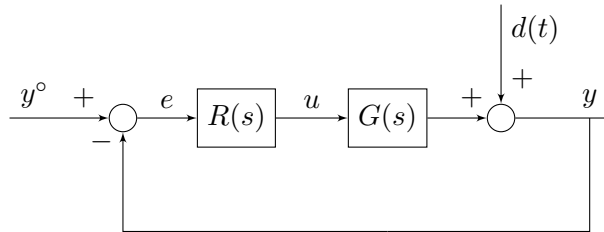
$$|e_{y^\circ, \infty}| = 0, \quad y^\circ(t) = \text{sca}(t)$$

$$|e_{n, \infty}| \leq \frac{1}{10}, \quad n(t) = \sin(\omega_d t), \omega_d \geq 10 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c \geq 0.1 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m \geq 40^\circ$$

11.3 Sistema con ritardo



con

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{(1+s)(1+10s)}$$

Specifiche:

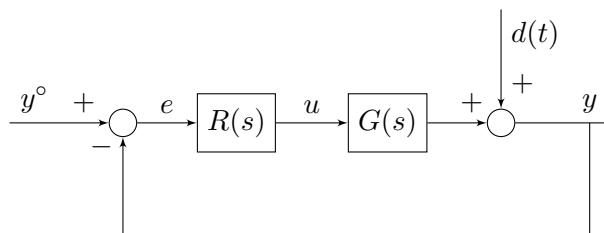
$$|e_\infty| < 0.15, \quad d(t) = \pm \text{sca}(t)$$

$$\omega_c \geq 0.3 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m \geq 40^\circ$$

11.4 Disturbi Fourier trasformabili

Per il seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G(s) = \frac{k}{(1+s)(1+0.2s)} \quad k = 2 \pm 0.2$$

Si progetti il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

$$|e_\infty| < 0.2, \quad y^\circ(t) = \text{ram}(t)$$

$$d(t) = \sin(\omega_d t), \omega_d \leq 0.2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m \geq 40^\circ$$

12.1 Sistema non lineare

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_1(t) - x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(x_2(t)) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

dove il grafico della funzione periodica $f(\cdot)$ è mostrato in Figura 12.1.

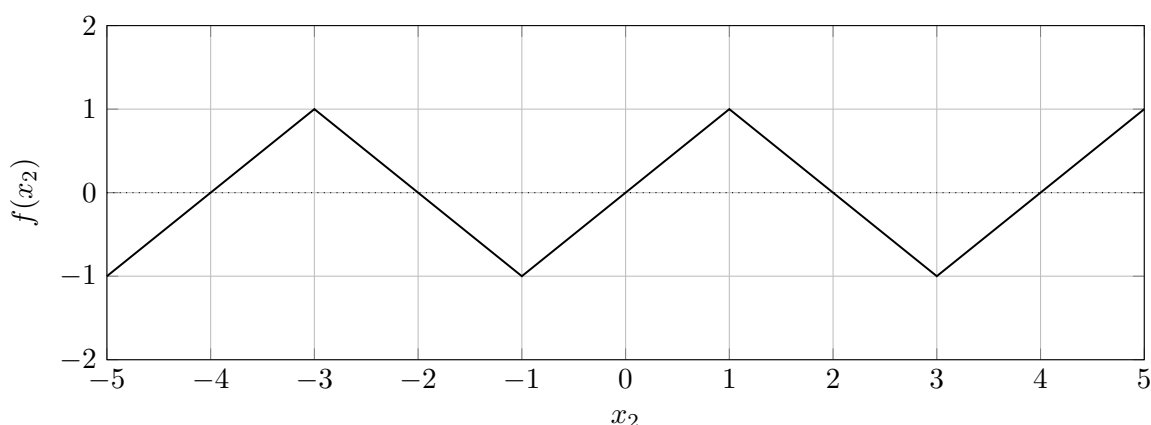


Figura 12.1: Grafico della funzione periodica $f(\cdot)$.

1. Si risponda alle seguenti domande, giustificando brevemente le risposte:
 - (a) Il sistema è dinamico?
 - (b) Il sistema è lineare?
 - (c) Qual è l'ordine del sistema?
 - (d) Il sistema è MIMO?
 - (e) Il sistema è strettamente proprio?

2. Si calcolino i punti di equilibrio e si analizzino le proprietà di stabilità degli stessi nei seguenti tre casi:
 - (a) $u(t) = \bar{u} = 0$;
 - (b) $u(t) = \bar{u} = 1$;
 - (c) $u(t) = \bar{u} = 2$.

3. Si consideri il caso di $u(t) = 0$. Si calcoli analiticamente il movimento dello stato e dell'uscita del sistema data la condizione iniziale

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

12.2 Schemi a blocchi

Si consideri lo schema a blocchi in Figura 12.2

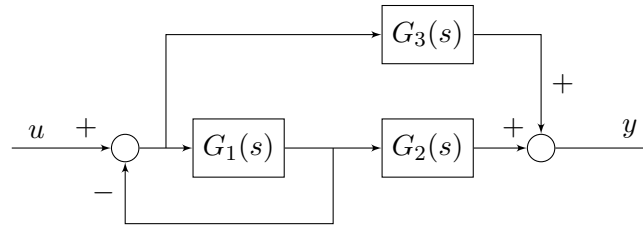


Figura 12.2: Schema a blocchi.

dove $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$ sono funzioni di trasferimento di sistemi di ordine 1.

1. Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema complessivo in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.
2. Posti:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+3}, \quad G_2(s) = \frac{s+4}{s+0.1}, \quad G_3(s) = -\frac{1}{s+3},$$

verificare che:

$$H(s) = \frac{3.9}{(s+0.1)(s+4)}$$

e studiare le proprietà di stabilità del sistema avente ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

3. Calcolare la risposta di regime (a transitorio esaurito) del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) = e^{-2t} + 4$, $t \geq 0$.

12.3 Sistema in anello aperto

Si consideri il seguente sistema in spazio di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -20x_1(t) + 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

1. Si risponda alle seguenti domande, giustificando le risposte:
 - (a) Si calcoli la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.
 - (b) Si individuino poli, zeri e guadagno della funzione di trasferimento $G(s)$.
 - (c) Il sistema è asintoticamente stabile?
 - (d) Il sistema è a fase minima?
2. Si traccino i diagrammi di Bode (del modulo e della fase) di $G(s)$.

3. Si calcoli l'espressione analitica della risposta forzata dell'uscita a fronte di un ingresso $u(t) = e^{\alpha t} \text{sca}(t)$ nei casi:
 - (a) $\alpha = 0$
 - (b) $\alpha = -10$
4. Si calcoli l'espressione analitica della risposta libera dell'uscita del sistema avente condizioni iniziali:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

12.4 Sistema a fase non minima

Si consideri lo schema di controllo rappresentato in Figura 12.3

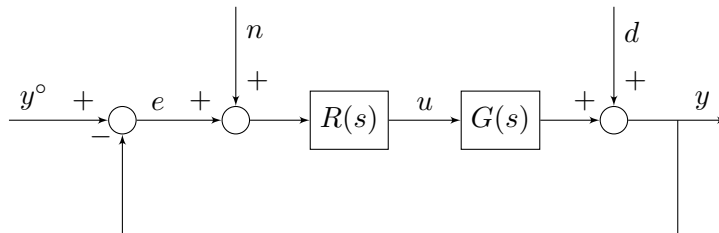


Figura 12.3: Schema di controllo.

dove

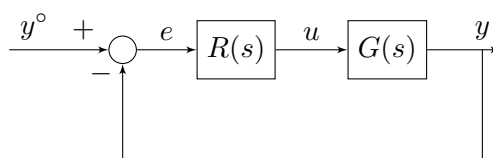
$$G(s) = \frac{1 - 0.1s}{(1 + 0.1s)(1 + s)(1 + 10s)},$$

è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine, da controllare.

1. Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore di ordine minimo in modo tale che
 - (a) L'errore a transitorio esaurito e_∞ soddisfi la limitazione $|e_\infty| \leq 0.001$ quando $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$, $n(t) = 0$ e $d(t) = 0$.
 - (b) L'errore a transitorio esaurito e_∞ soddisfi la limitazione $|e_\infty| \leq 0.1$ quando $y^\circ(t) = 0$, $n(t) = \sin(\omega_n t)$ e $d(t) = 0$, con $\omega_n \geq 10^2$.
 - (c) L'errore a transitorio esaurito e_∞ soddisfi la limitazione $|e_\infty| \leq 0.1$ quando $y^\circ(t) = 0$, $n(t) = 0$ e $d(t) = \sin(\omega_d t)$, con $\omega_d \leq 0.1$.
 - (d) Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50° .
 - (e) La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 3.
2. Si determini la funzione di trasferimento $R^*(z)$ del regolatore ottenuto discretizzando $R(s)$ con il metodo di Eulero implicito e con il valore di $T_s = 0.1$, valutando la variazione di margine di fase dovuta alla discretizzazione.
3. Scrivere la corrispondente legge di controllo a tempo discreto.

12.5 Integratore nel processo

Si consideri il seguente schema di controllo:



dove

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$$

Si progetti $R(s)$ in modo tale che:

$$\begin{aligned} |e_\infty| &= 0 & y^\circ &= \text{sca}(t) \\ \omega_c &\geq 1 \text{ rad/s} \\ \varphi_m &\geq 50^\circ \end{aligned}$$

13.1 Analisi prestazioni

In Figura 13.1 sono rappresentati i diagrammi di Bode (asintotici ed esatti) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$.

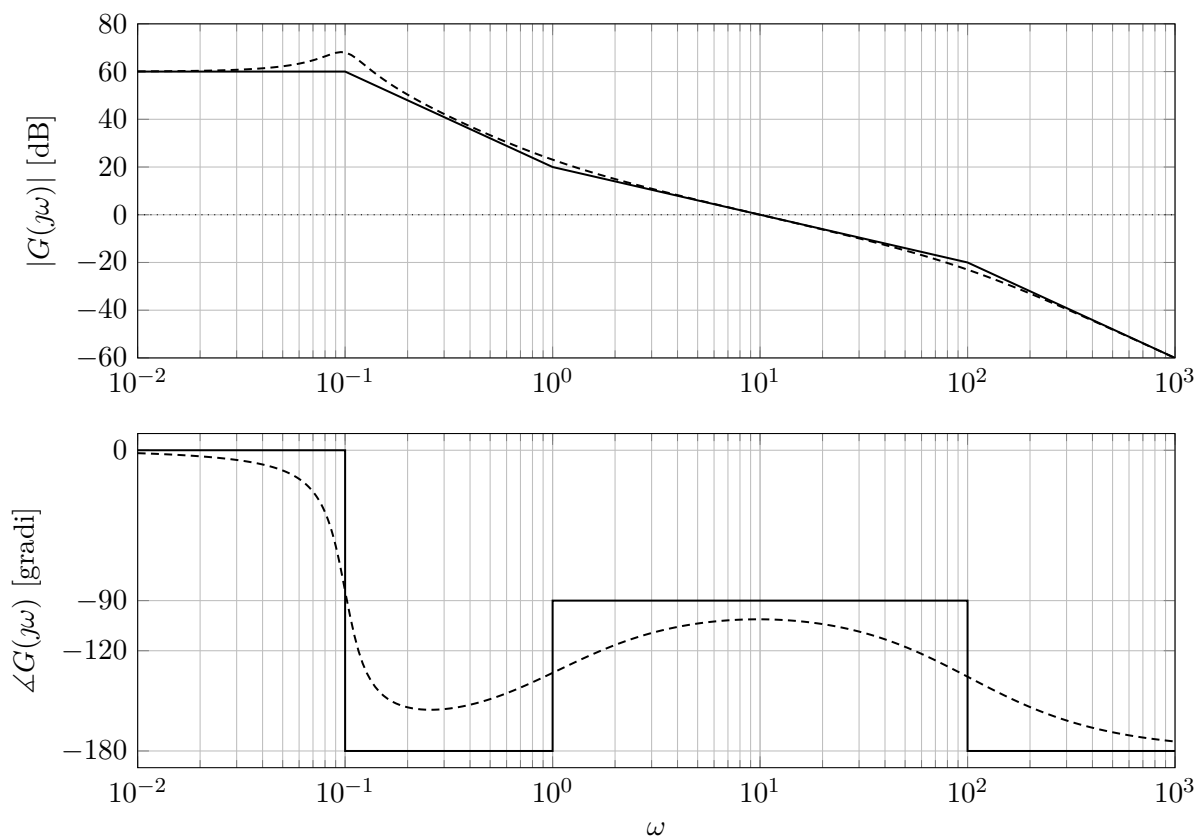


Figura 13.1: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$.

1. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
 - (a) La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t)$ si assesta al valore 1000.
 - (b) La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t)$ presenta oscillazioni ripetute smorzate.
 - (c) I transitori si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.
 - (d) I segnali sinusoidali in ingresso $u(t) = \sin(\omega t)$ con pulsazione $\omega \in [100, 1000]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.

2. Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in Figura 13.2 ed è presente un disturbo additivo sull'uscita $d(t)$.

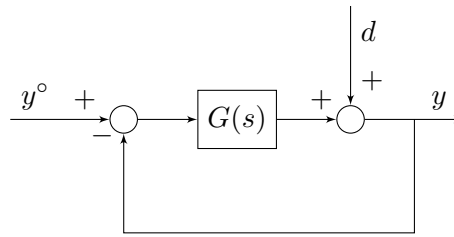


Figura 13.2: Schema con cui viene retroazionato il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
 - La risposta del sistema retroazionato all'ingresso $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$, con $d(t) = 0$, si assesta al valore 1000.
 - I transienti del sistema retroazionato dovuti alla condizione iniziale si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.
 - I segnali sinusoidali in ingresso al sistema retroazionato $y^\circ(t) = \sin(\omega t)$, con pulsazione $\omega \in [100, 1000]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.
 - I disturbi sinusoidali sull'uscita del sistema retroazionato $d(t) = \sin(\omega t)$ con pulsazione $\omega \in [0.01, 0.1]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 10.
3. Dire, giustificando la risposta, come e se cambierebbero le risposte al punto 2, nel caso in cui il disturbo $d(t)$ fosse additivo sull'ingresso al sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ invece che sull'uscita, come mostrato in Figura 13.3.

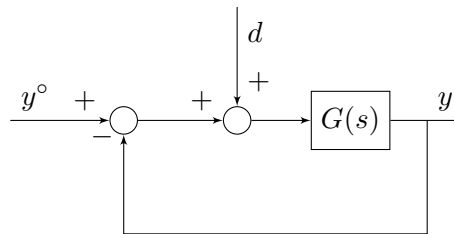


Figura 13.3: Schema con cui viene retroazionato il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ con disturbo additivo sull'ingresso.

13.2 Sistema in anello aperto

In Figura 13.4 sono rappresentati i diagrammi di Bode (esatti e approssimati) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico lineare di ordine 3.

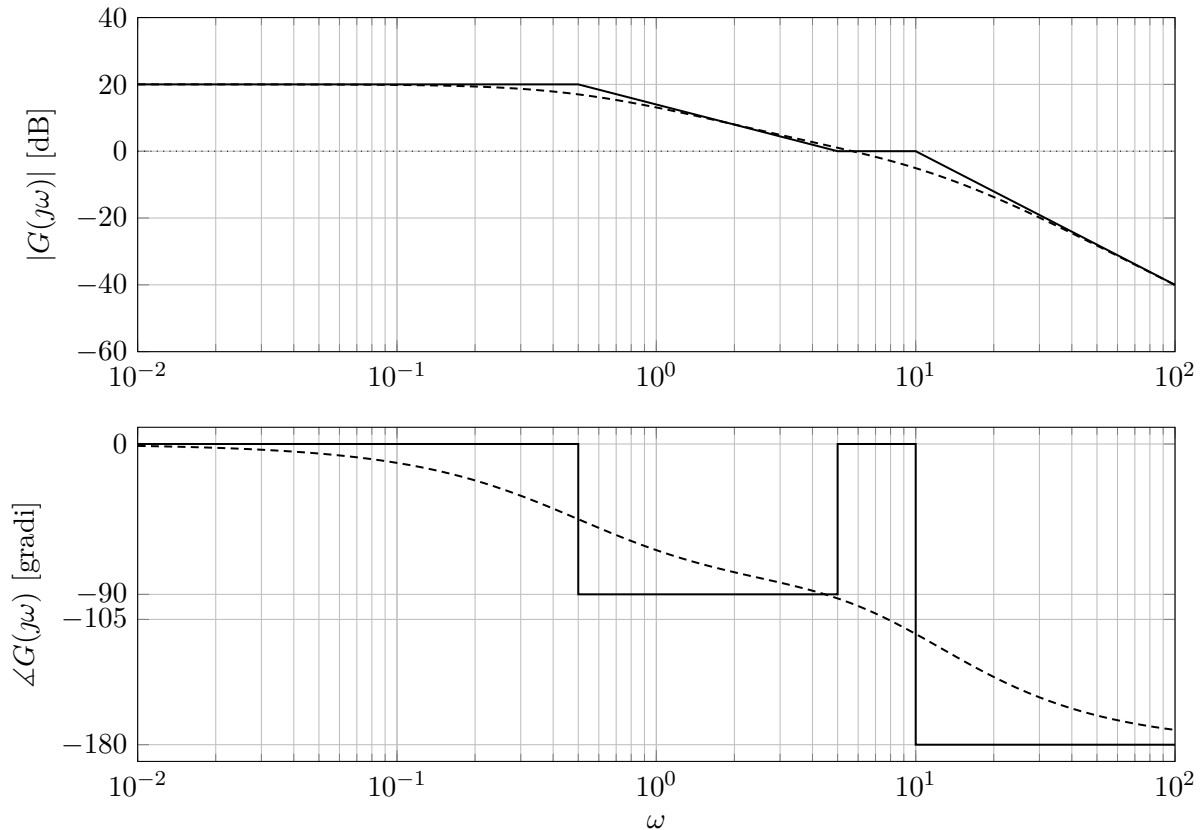


Figura 13.4: Diagrammi di Bode di $G(s)$.

1. Verificare che il sistema è asintoticamente stabile e tracciare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t)$.
2. Determinare l'espressione analitica della risposta di regime del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ all'ingresso $u(t) = \sin(100t) + \cos(0.01t)$.
3. Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene retroazionato con retroazione negativa unitaria come indicato in Figura 13.5.

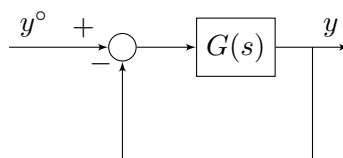


Figura 13.5: Schema con cui viene retroazionato $G(s)$.

- (a) Verificare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile e tracciare la risposta del sistema all'ingresso $y^o(t) = sca(t)$.
- (b) Determinare l'espressione analitica della risposta di regime del sistema retroazionato all'ingresso $y^o(t) = 10 + \sin(100t)$. Valutare il tempo necessario affinché la risposta del sistema si assesti a quella di regime calcolata.

4. Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene inserito nello schema di controllo in Figura 13.6, dove $R(s)$ è la funzione di trasferimento del regolatore.

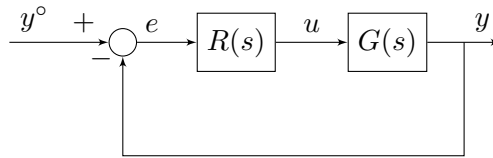


Figura 13.6: Schema di controllo.

- (a) Posto $R(s) = k$, dire se esiste un valore di $k > 1$ tale che il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.
- (b) Posto $R(s) = \frac{k}{s}$, dire se esiste un valore di $k > 1$ tale che il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.

13.3 Controllore digitale

Dato il sistema di controllo a tempo continuo in retroazione come mostrato in Figura 13.7

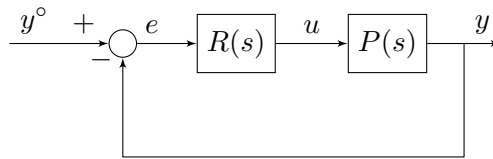


Figura 13.7: Schema di controllo.

in cui il processo e il regolatore sono rispettivamente descritti dalle funzioni di trasferimento:

$$P(s) = \frac{0.5}{s(1 + 0.01s)}, \quad R(s) = 2 \cdot \frac{1 + 10s}{s}$$

e dovendo realizzare il regolatore con tecnologia digitale:

1. Determinare il tempo di campionamento T_s in modo che la pulsazione di campionamento ω_s sia superiore di almeno una decade alla pulsazione critica ω_c , che il decremento del margine di fase φ_m dovuto a:

- Campionamento,
- Tempo di calcolo $\tau_{\text{comp}} = 5\text{ms}$,
- Filtro antialiasing con banda pari a 10 volte la banda del sistema in anello chiuso,

non ecceda 9° .

2. Calcolare la funzione di trasferimento $R^*(z)$ del regolatore a tempo discreto ottenuto da $R(s)$ col metodo di Eulero esplicito e con il valore di T_s determinato.
3. Esprimere la corrispondente legge di controllo a tempo discreto.

13.4 Progetto del controllore

Si consideri il sistema di controllo mostrato in Figura 13.8.

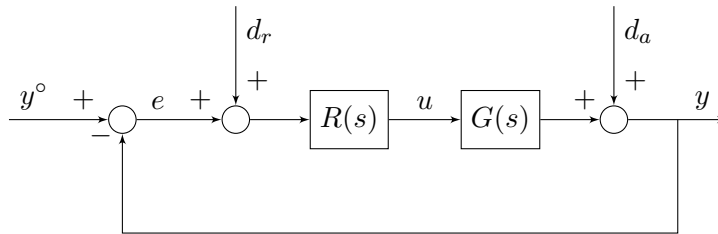


Figura 13.8: Schema di controllo.

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{2s}$$

e i segnali indicati valgono:

$$\begin{aligned} y^o(t) &= 2 \operatorname{sca}(t), \\ d_a(t) &= -0.1 \operatorname{sca}(t), \\ d_r(t) &= A_r \sin(\omega_r t), \quad |A_r| < 10, \omega_r > 20. \end{aligned}$$

Determinare un regolatore $R(s)$ tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e che:

1. l'errore a transitorio esaurito prodotto da $y^o(t)$ e $d_a(t)$ sia nullo,
2. la pulsazione critica ω_c sia compresa tra 0.1 e 1 rad/s,
3. il margine di fase φ_m sia di almeno 45° ,
4. l'ampiezza dell'effetto asintoticamente prodotto dal disturbo $d_r(t)$ su $y(t)$ non superi 0.1.